البرمجة الخطية *Linear Programming*

تعتبر بحوث العمليات *Operations research* من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحـرز تطبيقهـا نجاحاً واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على حدٍ سواء . فجذورها التأريخية تمتـد منـذ القـرن الثامن عشر وبالذات عام *1885* حيث إستخدم فردريك تايلر التحليل العلمي في طرق الإنتاج في محاولة لزيادة كمية المواد الخام المنقولة بأقل جهد ممكن . ونتيجة للمعضلات التعبوية والسوقية التي واجهت دول الحلفاء إثناء الحرب العالمية الثانية وصعوبة الحصول على حلول لهذه المعضلات من قبـل جهـة معينة ذات إختصاص واحد ، لذا قررت القيادة العامة لقوات الحلفاء تشكيل أول مجموعـة استـشارية مختلطة تضم عدد من العلماء الإختصاصيين للتعاون فيما بينهم وتقديم المشورة للقيادة ، ولقد سـميت هذه المجموعة الإستشارية بفريق بحوث العمليات . لذا فقد دأب هذا الفريق منذ بدايـة تـشكيله علـى دراسة الوضع العسكري لقوات الحلفاء وتقديم الأساليب العلمية لتحركات القوات المعادية ولإنزال أقصى الضربات فيها . وبعد إنتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الإختصاصيين في لجـان بحـوث العمليات إلى الحياة المدنية محاولين تطبيقها لحل معضلات مدنيـة مـشابهة وتعمـيم دراسـتها فـي الجامعات. كما وإستفادت من تطبيقها شركات صناعية كبيرة وبالأخص المؤسسات ذات الأرباح العاليـة مثل الشركات النفطية . إذ إنها أول من قام بتطبيق إسلوب البرمجـة فـي تخطـيط الإنتـاج وبأوسـع مستوياته.

ومن أهم العوامل التي ساعدت إختصاصيي بحوث العمليات في حل المعضلات المعقـدة هـو تطـور الحاسبات الأليكترونية إذ إنها ساعدت الباحثين في تنفيذ التحليلات والدراسات المطلوبة بسرعة وبدقـة فائقتين.

أما الخطوات المتخذة في بحوث العمليات لمعالجة المعضلات هي :

1- تعريف المشكلة قيد البحث .

2- صياغة النموذج الملائم للمشكلة

3- إيجاد حل للنموذج .

4- إختبار مدى صلاحية النموذج .

5- تنفيذ النتائج النهائية .

أما البرمجة الخطية *Linear programming* فتعود أساسياتها إلى القرن التاسع عشر إذ قـدمت من قبل كوردن في عام *1873* وطورت في عام *1947* عندما إبتـدع دانتـزك الطريقـة المبـسطة *Simplex method* لجدولة إستلام المواد في سلاح الطيران الأمريكي . وحاليـاً تحتـل البرمجـة الخطية مركزاً مرموقاً في مجالات بحوث العمليات ، كما تكمن أهمية البرمجة الخطيـة فـي كونهـا وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وتعتبر أبسط وأسهل النماذج التي يمكن إنشاؤها لمعالجة

معضلات البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى . ويمكن القول إن البرمجة الخطية هي طريقة علمية تهدف إلى إستخدام الموارد المحدودة أفضل إستخدام لتحقيق هدف معين .

إن المستلزمات الأساسية للبرمجة الخطية هي :

1- وجود هدف معين مطلوب تحقيقه (كأقصى ربح أو أدنى كلفة ...إلخ).

2- وجود بدائل مختلفة للوصول إلى الهدف .

3- الموارد المستخدمة يجب أن تكون محدودة.

4- وجوب العلاقة بين المتغيرات .

5- التعبير عن دالة الهدف والقيود بمعادلات أو متباينات خطية.

4-1- صيغ البرمجة الخطية :

1- الصيغة العامة *General form* : تأخذ النموذج التالي :

$$\max .or \min . \quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad \textit{Objective function}$$

$$S.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_i \qquad \textit{Constra int s}$$

$$i=1,2,\ldots,m$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

إذ إن C_j تمثل الكلفة أو الزمن أو الربح أو الإيراد ...إلخ. للوحدة الواحدة.

X_j تمثل متغيرات القرار **Decision variables** .

a_{ij} تمثل المعاملات الفنية **Technical coefficients** .

b_i تمثل الكميات المتاحة للإستخدام **Availability amounts** .

2- الصيغة القانونية *Canonical form* : النموذج العام لهذه الصيغة يكون :

$$\max . \quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad \textit{Objective function}$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \qquad \textit{Constra int s}$$

$$X_j \geq 0 \qquad \textit{nonnegative constra int s}$$

أي إنها تمتاز بالخصائص الآتية :

1- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة ($X_j \geq 0$) .

2- جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي($\leq$) .

3- تعظيم *maximized* دالة الهدف فقط .

كما يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية بإستخدام القواعد التالية :

1- يمكن تحويل تصغير *minimized* دالة الهدف إلى تعظيم *maximized* وبالعكس بـ ضرب دالة الهدف في (1−) ، أي إن : $max.\ Z = min.\ (-Z)$

2- يمكن تحويل قيد لكبر من أو يساوي ≥ إلى أصغر من أو يـ ساوي ≤ بضرب المتباينـة فـي (1-) ، أي إن : $\sum a_{ij} X_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -\sum a_{ij} X_j \leq b_i$

3- يمكن تحويل قيد المساواة (=) إلى قيدين من نوع أصغر من أو يساوي ≤ وبالشكل التالي:

$$\sum a_{ij} X_j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{ij} X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij} X_j \leq -b_i \end{array} \right\}$$

4- يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة *absolute value* إلى قيدين من نـ وع أصـ غر مـ ن أو يساوي ≤ وبالشكل التالي :

$$\left| \sum a_{ij} X_j \right| \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{ij} X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij} X_j \leq b_i \end{array} \right\}$$

$$or \quad \left| \sum a_{ij} X_j \right| \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sum a_{ij} X_j \leq -b_i \\ \sum a_{ij} X_j \leq -b_i \end{array} \right\}$$

5- يمكن تحويل المتغير غير المقيد في الإشارة *unrestricted sign* إلـ ى متغيـرين غيـ ر سالبين ، وكما في العلاقة أدناه :

$$X_i = X_i^{'} - X_i^{''} \quad and \quad X_i^{'}, X_i^{''} \geq 0$$

3- <u>الصيغة القياسية *Standard form*</u> : الشكل العام لهذه الصيغة يأخذ الخصائص التالية :

1- جميع القيود تكون معادلات (القيود من نوع مـ ساواة (=)) ماعـ دا قيـ د عـ دم الـ سالبية *nonnegative* إذ يبقى متباينة من نوع لكبر من أو يساوي (أي إن $X_j \geq 0$) .

2- الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب (أي إن $b_i \geq 0$) .

3- دالة الهدف تكون إما تصغير .*min* أو تعظيم .*max* .

ويمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية وبالإضافة إلى ما طرح في الصيغة القانونية ، يمكن تحويل قيود المتباينات إلى معادلات وكما يلي :

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_{ij} X_j + S_i = b_i$$
$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_{ij} X_j - S_i = b_i$$

إذ إن S_i تمثل متغيرات الركود *Slack variables* وهي متغيرات وهمية وتكون غير سالبة (أي إن $S_i \geq 0$) .

<u>مثال-1</u> : حول الصيغة العامة للبرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية والصيغة القياسية :

$$\begin{array}{ll} min. & Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \\ s.t. & X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \\ & -6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \\ & \left| 19X_1 - 7X_2 + 5X_3 \right| \leq 13 \\ & X_1, X_2 \geq 0, X_3 \ unrestricted \end{array}$$

<u>الحل</u>: بإفتراض إن : $X_3 = X_3{}' - X_3{}''$

أ- الصيغة القانونية :

$$\begin{aligned}
min.\quad & Z=-2X_1-3X_2-5(X_3{}'-X_3{}'')\\
s.t.\quad & -X_1-X_2+(X_3{}'-X'')\le 5\\
& -6X_1+7X_2-9(X_3{}'-X_3{}'')\le 15\\
& 6X_1-7X_2+9(X_3{}'-X_3{}'')\le -15\\
& 19X_1-7X_2+5(X_3{}'-X_3{}'')\le 13\\
& -19X_1+7X_2-5(X_3{}'-X_3{}'')\le 13\\
& X_1,X_2,X_3{}',X_3{}''\ge 0
\end{aligned}$$

ب- الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned}
max.\quad & Z=2X_1+3X_2+5(X_3{}'-X_3{}'')\\
s.t.\quad & -X_1-X_2+(X_3{}'-X'')+S_1=5\\
& -6X_1+7X_2-9(X_3{}'-X_3{}'')=15\\
\\
& 19X_1-7X_2+5(X_3{}'-X_3{}'')+S_3=13\\
& -19X_1+7X_2-5(X_3{}'-X_3{}'')+S_4=13\\
& X_1,X_2,X_3{}',X_3{}'',S_1,S_2,S_3,S_4\ge 0
\end{aligned}$$

4-2- <u>صياغة النموذج</u> <u>*Formulation of the model*</u> : يمكن صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية حسب المعطيات المتوفرة لدى الباحث ،كما موضحة في المثال التالي :

<u>مثال- 2</u> : مصنع ينتج ثلاثة منتجات A ، B و C وكل منتوج ينجز من خلال ثلاثة عمليات مختلفـة ، الزمن المستغرق (دقيقة) لإنتاج وحدة واحدة من كل منتوج والطاقة المتاحة لكل عمليـة (دقيقـة/ يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتوج (ألف دينار) كانت كالآتي :

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
الربح	3	2	5	. . .

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتعظيم الربح الكلي . ثـ م أعد صياغة النموذج لكل حالة من الحالات التالية :

أ- بإفتراض منتوج رابع أضيف للعملية الإنتاجية والزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (3 ، 5 و 1) على التوالي وربح الوحدة الواحدة هو 6 الآف دينار ، وإن الطاقة المتاحة للعملية الثالثة تستغل بكاملها .

ب- بإفتراض إن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لاتزيد عن 10 دقائق / يوم .

ج- بإفتراض إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين B و C يجب أن لاتقل عن 0.4 .

الحل : بإفتراض إن X_1 ، X_2 و X_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتجات A ، B و C على التوالي . فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أ- النموذج الرياضي يكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 + 5X_4 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 420 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ب-

$$430 - (X_1+2X_2+X_3) + 460 - (3X_1+2X_3) + 420 - (X_1+4X_2) \le 10$$
$$\rightarrow\ 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ج-
$$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \ge 0.4 \Rightarrow\quad X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

أ- بإفتراض منتوج رابع أضيف للعملية الإنتاجية والزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (3 ، 5 و 1) على التوالي وربح الوحدة الواحدة هو 6 الآف دينار ، وإن الطاقة المتاحـ ـة للعمليـ ـة الثالثة تستغل بكاملها .

ب- بإفتراض إن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لاتزيد عن 10 دقائق / يوم .

ج- بإفتراض إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين B و C يجب أن لاتقل عن 0.4 .

الحل : بإفتراض إن X_1 ، X_2 و X_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً مـ ـن المنتجـ ـات A ، B و C على التوالي . فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أ- النموذج الرياضي يكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 + 5X_4 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 420 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ب-

$$430 - (X_1+2X_2+X_3) + 460 - (3X_1+2X_3) + 420 - (X_1+4X_2) \le 10$$
$$\rightarrow\ 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ج- $$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \ge 0.4 \Rightarrow \quad X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned}
max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\
s.t. \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\
& 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\
& X_1 + 4X_2 \le 420 \\
& X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

4-3- حل نموذج البرمجة الخطية :

توجد طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية هما :

1- **الطريقة البيانية *Graphical method*** : تستخدم هذه الطريقة في حالة وجود عدد محدد من المتغيرات (متغيرين أو ثلاثة فقط) ولكنها لاتعطينا الطريقة العملية لحل البرامج الخطية لأن معظم مسائل البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات .

تستند هذه الطريقة على رسم هذه القيود من نقطتي تقاطعهم مع محوري الإحداثيات ، ومن ثم تحددالمنطقة المشتركة بين هذه القيود والتي تسمى بمنطقة الحلول المقبولة *Feasible Solutions Region (F.S.R.)* ، إذ إن زوايا هذه المنطقة تمثل النقاط المتطرفة *Extreme Points* التي منها نحصل على القيم المثلى *Optimal values* للمتغيرين بحيث يحققان غاية دالة الهدف . وتعتبر هذه الطريقة الأساس في الوصول إلى الطريقة المبسطة *Simplex method* .

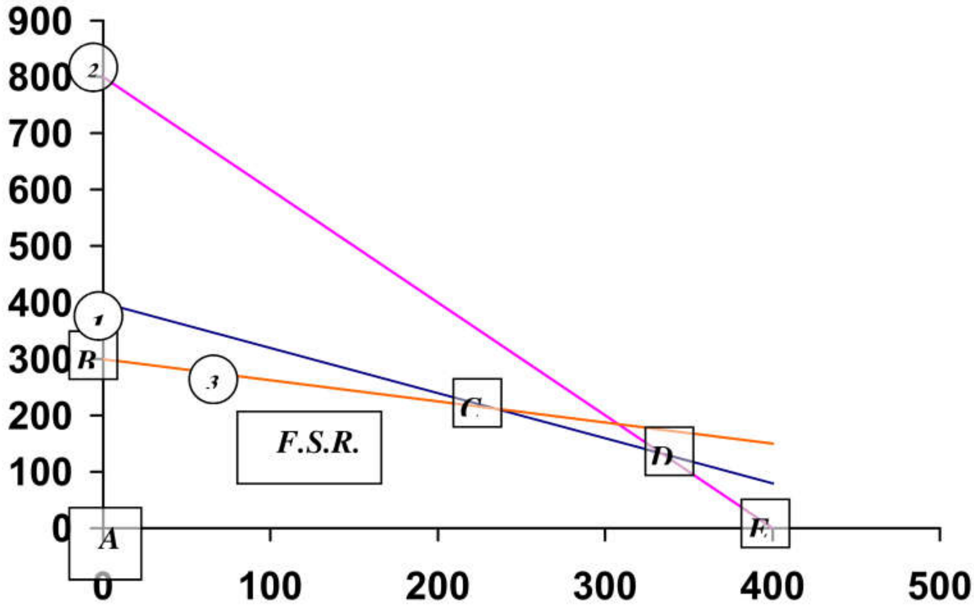
مثال-3 : حل نموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\begin{aligned}
max. \quad & Z = 120X + 100Y \\
s.t. \quad & 2X + 2.5Y \le 1000 \\
& 3X + 1.5Y \le 1200 \\
& 1.5X + 4Y \le 1200 \\
& X, Y \ge 0
\end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllll}
1. & 2X + 2.5Y = 100 & if & X = 0 & then & Y = 400 \Rightarrow (0,400) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 500 \Rightarrow (500.0) \\
2 & 3X + 1.5Y = 1200 & if & X = 0 & then & Y = 800 \Rightarrow (0,800) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 400 \Rightarrow (400,0) \\
3. & 1.5X + 4Y = 1200 & if & X = 0 & then & Y = 300 \Rightarrow (0,300) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 800 \Rightarrow (800,0) \\
4. & X = 0 \\
5. & Y = 0
\end{array}$$

تثبت هذه النقاط بيانياً لتحديد منطقة الحلول المقبولة *(F.S.R.)* .



ومن الرسم أعلاه نلاحظ إن النقاط المتطرفة هي *A* ؛ *B* ؛ *C* ؛ *D* و *E*

بحل المعادلتين *1* و *3* آنياً فنحصل على النقطة (*C(4000/17 , 3600/17*

بحل المعادلتين *1* و *2* آنياً فنحصل على النقطة (*D(1000/3 , 400/3*

وبتعويض هذه النقاط المتطرفة في دالة الهدف نجد النقطة المثلى

Points	*Z = 120 X +100 Y*
A(0,0)	*Z = 0 + 0 = 0*
B(0,300)	*Z = 0 +100*300 = 30000*
C(4000/17, 3600/17)	*Z=120*(4000/17)+100*(3600/17)=840000/17*
D(1000/3,400/3)	*Z=120*(1000/3)+100*(400/3)=160000/3 →max.*
E(400,0)	*Z = 120* 400 + 0 = 48000*

لذا فالحل الأمثل يكون *X=1000/3* و *Y=400/3* ؛ وإن قيمة دالة الهدف *Z=160000/3*

<u>مثال 4</u> أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية لتعظيم وكذلك لتصغير دالة الهدف

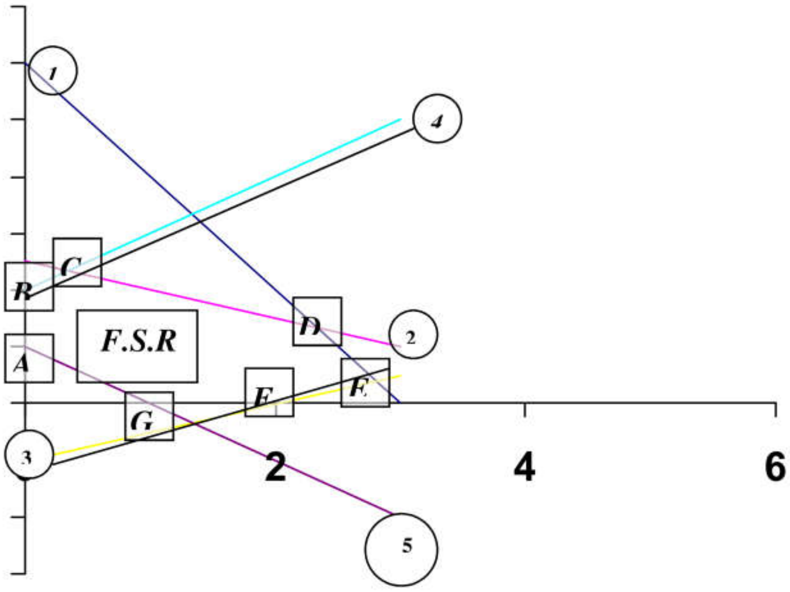
$$
\begin{aligned}
& Z = 4X + 5Y \\
s.t.\quad & 2X + Y \le 6 \\
& X + 2Y \le 5 \\
& X - 2Y \le 2 \\
& -X + Y \le 2 \\
& X + Y \ge 1 \\
& X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل

1.	$2X+Y=6$	if	$X=0$	then	$Y=6$	$\Rightarrow$	$(0,6)$
		if	$Y=0$	then	$X=3$	$\Rightarrow$	$(3,0)$
2.	$X+2Y=5$	if	$X=0$	then	$Y=2.5$	$\Rightarrow$	$(0,2.5)$
		if	$Y=0$	then	$X=5$	$\Rightarrow$	$(5,0)$
3.	$X-2Y=2$	if	$X=0$	then	$Y=-1$	$\Rightarrow$	$(0,-1)$
		if	$Y=0$	then	$X=2$	$\Rightarrow$	$(2,0)$
4.	$-X+Y=2$	if	$X=0$	then	$Y=2$	$\Rightarrow$	$(0,2)$
		if	$Y=0$	then	$X=-2$	$\Rightarrow$	$(-2,0)$
5.	$X+Y=1$	if	$X=0$	then	$Y=1$	$\Rightarrow$	$(0,1)$
		if	$Y=0$	then	$X=1$	$\Rightarrow$	$(1,0)$

6. $X=0$

7. $Y=0$



بحل المعادلتين 2 و 4 آنياً نجد النقطة (C(1/3 , 7/3

بحل المعادلتين 1 و 2 آنياً نجد النقطة (D(7/3 , 4/3

بحل المعادلتين 1 و 3 آنياً نجد النقطة (E(14/5 , 2/5

Points	$Z = 4X + 5Y$
A(0 , 1)	$0 + 5 = 5$
B(0 , 2)	$0 + 10 = 10$
C(1/3 , 7/3)	$4/3 + 35/3 = 13$
D(7/3 , 4/3)	$28/3 + 20/3 = 16 \rightarrow max.$
E(14/5 , 2/5)	$56/5 + 10/5 = 66/5$
F(2 , 0)	$8 + 0 = 8$
G(1 , 0)	$4 + 0 = 4 \rightarrow min.$

لذا فالحل الأمثل يكون   أعلى قيمة إلى Z هي 16 عندما $X = 7/3$ و $Y = 4/3$

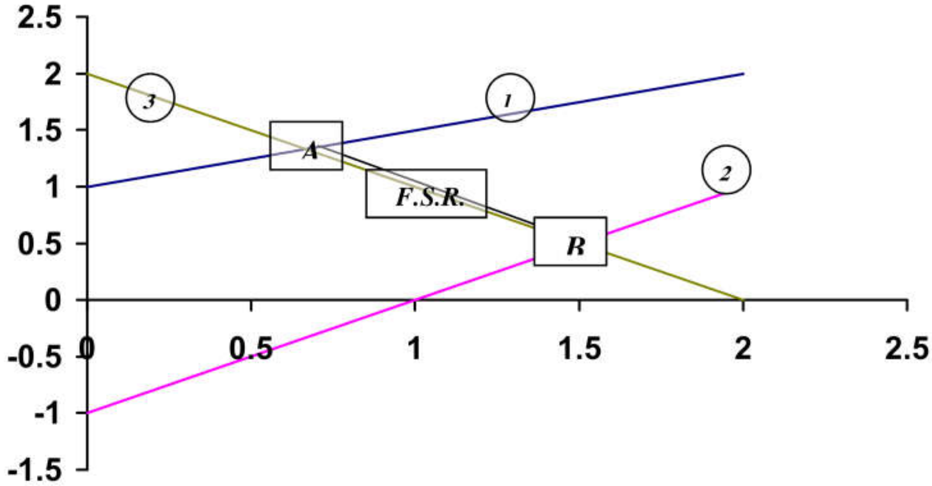
أقل قيمة إلى Z هي 4 عندما $X = 1$ و $Y = 0$

<u>مثال 5</u> حل نموذج البرمجة الخطية التالي بالطريقة البيانية

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 2X + 4Y + 8 \\ s.t.\quad & -X + 2Y \le 2 \\ & X - Y \le 1 \\ & X + Y = 2 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

<u>الحل</u>

$$\begin{array}{llllll} 1. & -X + 2Y = 2 & if\ X = 0 & then\ Y = 1 & \Rightarrow & (0,1) \\ & & if\ Y = 0 & then\ X = -2 & \Rightarrow & (-2,0) \\ 2 & X - Y = 1 & if\ X = 0 & then\ Y = -1 & \Rightarrow & (0,-1) \\ & & if\ Y = 0 & then\ X = 1 & \Rightarrow & (1,0) \\ 3. & X + Y = 2 & if\ X = 0 & then\ Y = 2 & \Rightarrow & (0,2) \\ & & if\ Y = 0 & then\ X = 2 & \Rightarrow & (2,0) \\ 4. & X = 0 & & & & \\ 5. & Y = 0 & & & & \end{array}$$



منطقة الحلول المقبولة هي قطعة المستقيم AB والنقاط المتطرفة في هذه الحالة ستكون النقطتين

بحل المعادلتين 1 و 3 آنياً نحصة على النقطة $A(2/3, 4/3)$

بحل المعادلتين 2 و 3 آنياً نحصل على النقطة $B(3/2, 1/2)$

وعليه فإن

Points	$Z = 2X + 4Y + 8$
$A(2/3, 4/3)$	$4/3 + 16/3 + 8 = 44/3 \rightarrow max.$
$B(3/2, 1/2)$	$3 + 2 + 8 = 13$

لذا فالحل الأمثل هو $X = 2/3$ و $Y = 4/3$ وإن قيمة دالة الهدف $Z = 44/3$

2- <u>الطريقة المبسطة Simplex method</u> : تعتبر هذه الطريقة إحدى الوسائل الرياضية ذات الكفاءة العالية في إستخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة ، إذ تتطابق هذه الطريقة مع الطريقة البيانية عندما $S_i = 0$ ، أما في حالة $S_i > 0$ فإن أي قيد سيتحرك نحو الأسفل بحيث يوازي نفس المستقيم عندما $S_i = 0$.

لاتبحث هذه الطريقة عن كل الحلول الأساسية الممكنة ولكنها تولد حلول مقبولة أساسية متعاقبة بحيث كل حل جديد له إمكانية تحسين دالة الهدف .

ومن الجدير بالإنتباه إلى إن هذه الطريقة تستخدم فقط عندما تكون جميع القيود من نوع إصغر من أويساوي(≤) بشرط $b_i \geq 0$ ، ماعدا قيد عدم السالبية إذ يبقى أكبر من أو يساوي (≥).

أما الخطوات الرئيسية للحل فتكون :

1- تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية .

2- إختيار الحل الإبتدائي الأساسي المقبول *Starting Basic Feasible Solution(S.B.F.S.)* وكما موضح في الجدول أدناه :

		C_1	C_2	. . .	C_n	0	0	. . .	0	0
B.C.	B.V.	X_1	X_2	. . .	X_n	S_1	S_2	. . .	S_m	R.H.S.
0	S_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	1	0	. . .	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	0	1	. . .	0	b_2
:	:	:	:	. . .	:	:	:	. . .	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	0	0	. . .	1	b_m
$Z_j - C_j$		$-C_1$	$-C_2$	. . .	$-C_n$	0	0	. . .	0	0

3- يتم إختيار حل أساسي مقبول جديد بحيث يحسن دالة الهدف بإدخال متغير غير أساسي تكون قيمته في صف $Z_j - C_j$ (معاملات دالة الهدف) الأكثر سالبية إذا كانت دالة الهدف من نوع *max.* والقيمة الأكثر موجبةً إذا كانت دالة الهدف من نوع *min.* (شرط المثالية *Optimality condition* مع ضمان إن قيم العمود *R.H.S.* غير سالبة).

أما المتغير الخارج *Leaving Variable* فيتحدد بإعتباره النسبة الأقل من حاصل قسمة عمود *R.H.S.* على القيم الموجبة فقط المناظرة لها من عمود المتغير الداخل *Entering Variable* (شرط المقبولية *Feasibility condition*) ، وإن عنصر إلتقاء صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل يسمى بعنصر المحور *Pivot element* .

4- يحذف المتغير الداخل من جميع المعادلات في الجدول بإستثناء المعادلة المرتبطة بالمتغير الخارج ، إذ يقسم صف المتغير الخارج على عنصر المحور ويستبدل بالمتغير الداخل . ولحذف المتغير الداخل من بقية المعادلات تجرى التحويلات الصفية بضرب صف المتغير الداخل الجديد

في العنصر المقابل لعنصر المحور بعكس الإشارة لكل صف من صفوف المتغيرات الأساسية وتجمع مع عناصر الصفوف القديمة لكل متغير أساسي للحصول على الصفوف الجديدة لهم .

5- نستمر بتكرار الخطوات السابقة حتى تصبح جميع قيم صف $Z_j - C_j$ غير سالبة إذا كانت دالة الهدف من نوع *.max* ، أو غير موجبة إذا كانت الدالة من نوع *.min* ، أي نتوقف عندما لايمكن تحسين قيمة دالة الهدف وبذلك نكون قد حصلنا على الحل الأمثل للمسألة .

<u>مثال-6</u> : حل مثال-3 بإستخدام الطريقة المبسطة *Simplex method* .

<u>الحل</u> :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 120X + 100Y \\ s.t.\quad & 2X + 2.5Y + S_1 = 1000 \\ & 3X + 1.5Y + S_2 = 1200 \\ & 1.5X + 4Y + S_3 = 1200 \\ & X, Y, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

		120	100	0	0	0	0	
B.C.	B.V.	X	Y	S_1	S_2	S_3	R.H.S.	Ratio
0	S_1	2	2.5	1	0	0	1000	500
$\leftarrow 0$	S_2	3	1.5	0	1	0	1200	$400 \rightarrow min.$
0	S_3	1.5	4	0	0	1	1200	800
$Z_j - C_j$		$-120\uparrow$	-100	0	0	0	0	. .
$\leftarrow 0$	S_1	0	1.5	1	$-2/3$	0	200	$133.3 \rightarrow min.$
120	X	1	0.5	0	1/3	0	400	800
0	S_3	0	3.25	0	-0.5	1	600	184.6
$Z_j - C_j$		0	$-40\uparrow$	0	40	0	48000	. .
100	Y	0	1	2/3	$-4/9$	0	400/3	
120	X	1	0	$-1/3$	5/9	0	1000/3	
0	S_3	0	0	$-13/6$	17/18	1	500/3	
$Z_j - C_j$		0	0	80/3	200/9	0	160000/3	

بما إن جميع قيم صف $Z_j - C_j$ غير سالبة ودالة الهدف من نوع *.max* لذا فالحل أمثل ، وعليه فإن $X = 1000/3$ و $Y = 400/3$ وإن قيمة دالة الهدف $Z = 160000/3$ ، وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في حل المثال-3 .

أما العمليات الحسابية التي اجريت على التكرار الأول في الجدول أعلاه ، فهي :

لكون *120-* القيمة الأكثر سالبية في صف $Z_j - C_j$ لذا فالمتغير الداخل هو X ولكون أقل نسبة *400* لذا فالمتغير الخارج هو S_2 ، وللحصول على صف X الجديد نقسم صف S_2 القديم على *3* .
وللحصول على صفي S_1 و S_3 الجديدين نتبع العمليات التالية :

صف X الجديد *-2**	-2	-1	0	-2/3	0	-800
صف S_1 القديم	2	2.5	1	0	0	1000
بالجمع						
صف S_1 الجديد	0	1.5	1	-2/3	0	200

صف X الجديد *-1.5**	-1.5	-0.75	0	-0.5	0	-600
صف S_3 القديم	1.5	4	0	0	1	1200
بالجمع						
صف S_3 الجديد	0	3.25	0	-0.5	1	600

ملاحظة : أما إذا ظهر على الأقل قيد واحد من نوع لكبر أويساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ، فلايمكن تطبيق الطريقة المبسطة ، لذا يمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

1- طريقة – M (M- technique): وقد تسمى أيضاً طريقة الجزاء *Penalty method*، وكما ذكرنا سابقاً فإن هذه الطريقة تستخدم عندما لا تكون جميع القيود من نـ ـوع أصـ ـغر مـ ـن أويساوي ($\leq$) بشرط $b_i \geq 0$ ، أما الخطوات الأساسية لهذه الطريقة تكون :

أ- يكتب النموذج بالصيغة القياسية .

ب- تضاف المتغيرات الإصطناعية *Artificial variables (R_i)* إلى القيود من نـ ـوع لكبر من أو يساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ويجب أن تكون قيم هذه المتغيـ ـرات فـ ـي الحل النهائي (الأمثل) مساوية للصفر . بمعنى آخر:

- إذا كان القيد من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) يضاف المتغير الراكد S_i .
- إذا كان القيد من نوع لكبر من أو يساوي ($\geq$) يطرح المتغير S_i و يضاف المتغير R_i .
- إذا كان القيد من المساواة (=) يضاف المتغير R_i .

أما معاملات المتغيرات الإصطناعية R_i في دالة الهدف هي (M -) فـ ـي حالـ ـة *.max* و (M +) في حالة *.min* ، وبإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً . أما معاملات المتغيرات الراكدة S_i فمعاملاتها في دالة الهدف تبقى صفر .

لكون -120 القيمة الأكثر سالبية في صف $Z_j - C_j$ لذا فالمتغير الداخل هو X ولكون أقل نسبة 400 لذا فالمتغير الخارج هو S_2 ، وللحصول على صف X الجديد نقسم صف S_2 القديم على 3 .
وللحصول على صفي S_1 و S_3 الجديدين نتبع العمليات التالية :

صف X الجديد -2^*	-2	-1	0	-2/3	0	-800
صف S_1 القديم	2	2.5	1	0	0	1000
بالجمع						
صف S_1 الجديد	0	1.5	1	-2/3	0	200

صف X الجديد -1.5^*	-1.5	-0.75	0	-0.5	0	-600
صف S_3 القديم	1.5	4	0	0	1	1200
بالجمع						
صف S_3 الجديد	0	3.25	0	-0.5	1	600

<u>ملاحظة</u> : أما إذا ظهر على الأقل قيد واحد من نوع أكبر أويساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ، فلايمكن تطبيق الطريقة المبسطة ، لذا يمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

1- <u>**طريقة – M (M- technique)**</u>: وقد تسمى أيضاً طريقة الجزاء *Penalty method*، وكما ذكرنا سابقاً فإن هذه الطريقة تستخدم عندما لا تكون جميع القيود من نوع أصغر من أويساوي ($\leq$) بشرط $b_i \geq 0$ ، أما الخطوات الأساسية لهذه الطريقة تكون :

أ- يكتب النموذج بالصيغة القياسية .

ب- تضاف المتغيرات الإصطناعية *Artificial variables* (R_i) إلى القيود من نوع أكبر من أو يساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ويجب أن تكون قيم هذه المتغيرات في الحل النهائي (الأمثل) مساوية للصفر . بمعنى آخر:

- إذا كان القيد من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) يضاف المتغير الراكد S_i .
- إذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي ($\geq$) يطرح المتغير S_i و يضاف المتغير R_i .
- إذا كان القيد من المساواة (=) يضاف المتغير R_i .

أما معاملات المتغيرات الإصطناعية R_i في دالة الهدف هي ($-M$) في حالة *max.* و ($+M$) في حالة *min.* ، وبإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً . أما معاملات المتغيرات الراكدة S_i فمعاملاتها في دالة الهدف تبقى صفر .

ج- تستخدم المتغيرات الإصطناعية R_iكمتغيرات أساسية للقيود المتواجدة فيها في الحل الإبتدائي الأساسي المقبول ($S.B.F.S.$) .

د- الإستمرار بالحل كما في الطريقة المبسطة مع الأخذ بنظر الإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً ولكبر من القيم المتواجدة في الجدول عند تحديد المتغيرات الداخلة .

مثال-7 : حل النموذج الرياضي الآتي :

$$
\begin{aligned}
min.\quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 \\
s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 \geq 15 \\
& 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 \leq 20 \\
& X_1 + X_2 + X_3 = 5 \\
& X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل :

$$
\begin{aligned}
min.\quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 + MR_1 + MR_2 \\
s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\
& 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\
& X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\
& X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

		5	−6	−7	0	0	M	M		
B.C.	B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S.	Ratio
←M	R_1	1	5	-3	−1	0	1	0	15	3min.
0	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20	. .
M	R_2	1	1	1	0	0	0	1	5	5
$Z_j - C_j$		2M-5	6M+6↑	-2M+7	-M	0	0	0	20M	. .
−6	X_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	. .
0	S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	5.9
←M	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	-1/5	1	2	1.25min
$Z_j - C_j$		4/5M-31/5	0	8/5M+53/5↑	1/5M+6/5	0	-6/5M-6/5	0	2M-18	. .
−6	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
0	S_2	3	0	0	−2	1	2	−4	30	
−7	X_3	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
$Z_j - C_j$		-23/2	0	0	-1/8	0	-M+1/8	-M-53/8	-125/4	

لكون جميع قيم المعاملات في دالة الهدف (الصف $Z_j - C_j$) غير موجبة ، لذا فالحل أمثل وعليه فإن $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3= 5/4$ وإن قيمة دالة الهـ دف ف ـي نـهايتـه ـا الصغرى $Z= -125/4$.

2- طريقة المرحلتين *Two- Phase technique* : تستخدم هذه الطريقة أيضاً عندما لاتكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) . تعتمد خطوات حل هذه الطريقة على مرحلتين ، وكما يلي :

أ- المرحلة الأولى *Phase - I* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وكما وضحت في الطريقة السابقة .
2. تلغى دالة الهدف الأصلية ويحل محلها دالة الهدف : $min.\quad R=\sum R_i$ بإعتبار إن R_i هي المتغيرات الإصطناعية الموجودة في القيود ، أما القيود السابقة فتبقى كما هي .
3. تحل المسألة بالطريقة المبسطة ويتم التوقف عندما تكون قيمة $R=0$ وتصبح المتغيرات الإصطناعية R_i متغيرات غير أساسية ، أي إن قيمها في الجدول الأخير تساوي صفر . وبخلافه (أي إن $R\neq 0$) يعني لايوجد حل أمثل للمسألة .

ب- المرحلة الثانية *Phase-II* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحذف أعمدة R_i من الجدول الأمثل السابق وبإحلال معاملات دالة الهدف الأصلية محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير .
2. تحل المسألة بالطريقة المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل .

مثال-8 : حل نموذج المثال-7 بطريقة المرحلتين

Phase – I :

$$\begin{aligned} min.\quad & R = R_1 + R_2 \\ s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\ & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\ & X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\ & X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2- طريقة المرحلتين *Two- Phase technique* : تستخدم هذه الطريقة أيـضاً عنـدما لاتكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) . تعتمد خطوات حل هذه الطريقة على مرحلتين ، وكما يلي :

أ- المرحلة الأولى *Phase - I* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وكما وضحت في الطريقة السابقة .
2. تلغى دالة الهدف الأصلية ويحل محلها دالة الهدف : $min. \quad R=\sum R_i$ بإعتبار إن R_i هي المتغيرات الإصطناعية الموجودة في القيود ، أما القيـود السابقة فتبقىكما هي .
3. تحل المسألة بالطريقة المبسطة ويتم التوقف عندما تكون قيمة $R=0$ وتـصبح المتغيرات الإصطناعية R_i متغيرات غير أساسية ، أي إن قيمها فـي الجـدول الأخير تساوي صفر . وبخلافه (أي إن $R\neq 0$) يعنـى لايوجـد حـل أمثـل للمسألة .

ب- المرحلة الثانية *Phase-II* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحذف أعمدة R_i من الجدول الأمثل السابق وبـ إحلال معـاملات دالـة الهـدف الأصلية محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير .
2. تحل المسألة بالطريقة المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل .

مثال-8 : حل نموذج المثال-7 بطريقة المرحلتين

Phase – I :

$$\begin{aligned}
min. \quad & R = R_1 + R_2 \\
s.t. \quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\
& 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\
& X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\
& X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}$$

		0	0	0	0	0	1	1		
B.C.	**B.V.**	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	**R.H.S.**	**Ratio**
←1	R_1	1	5	-3	−1	0	1	0	15	3→min.
0	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20	. .
1	R_2	1	1	1	0	0	0	1	5	5
$R_j - C_j$		2	6↑	-2	-1	0	0	0	20	. .
0	X_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	. .
0	S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	5.9
←1	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	-1/5	1	2	1.25→min
$R_j - C_j$		4/5	0	8/5↑	1/5	0	-6/5	0	2	. .
0	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
0	S_2	3	0	0	−2	1	2	−4	30	
0	X_3	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
$R_j - C_j$		0	0	0	0	0	- 1	-1	0	

بما إن قيم R_1 و R_2 صفرية(أي إنها متغيرات غير أساسية) وإن قيمة $R=0$ لذا ننتقل إلى المرحلة الثانية بحذف عمودي R_1 و R_2 وإرجاع معاملات دالة الهدف الأصلية :

***<u>Phase-II</u>* :**

		5	−6	−7	0	0	
B.C.	**B.V.**	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	**R.H.S.**
−6	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	15/4
0	S_2	3	0	0	−2	1	30
−7	X_3	1/2	0	1	1/8	0	5/4
$Z_j - C_j$		-23/2	0	0	-1/8	0	-125/4

لكون جميع معاملات دالة الهدف غير موجبة ودالة الهدف من نوع *.min* ، لذا فالحل أمثل وعليه فإن : $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3= 5/4$ وإن قيمة دالـة الهـدف في نهايتها الصغرى $Z= -125/4$ وهو نفس الحل الذي حصلنا علية في المثال السابق .

تمارين الفصل الرابع

1- حول النماذج التالية إلى الصيغتين القانونية والقياسية :

$$
\begin{aligned}
1)\quad \max.\quad & Z = X_1 - 3X_2 \\
s.t.\quad & -X_1 + 2X_2 \le 5 \\
& X_1 + 3X_2 = 10 \\
& X_1, X_2 \text{ unrestricted in sign}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad \min.\quad & Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \\
s.t.\quad & X_1 + X_2 + 3X_3 \le 40 \\
& X_1 + 9X_2 - 7X_3 \ge 50 \\
& 2X_1 + 3X_2 = 20 \\
& |5X_2 + 8X_3| \le 100 \\
& X_1, X_2 \ge 0, \quad X_3 \text{ unrest.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad \min.\quad & Z = -3X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 5X_4 \\
s.t.\quad & 4X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = -2 \\
& X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 \le 14 \\
& 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \ge 2 \\
& X_1, X_2 \ge 0 \;,\; X_3 \le 0 \;,\; X_4 \text{unrest.}
\end{aligned}
$$

2- مصنع ينتج أربعة منتجات A , B , C , D بإستخدام ملكنتين M_1 , M_2 ، الزمن المستغرق وكلفة إنتاج وحدة واحدة على كل من الملكنتين والوقت المتاح للإشتغال لكل ملكنة وسعر البيع للوحدة الواحدة لكل منتج موضحة في الجدول أدناه :

machines	Time per unit (hours/unit)				Cost	Availability
	A	B	C	D	(I.D./hour)	hours
M_1	2	3	4	2	10	500
M_2	3	2	1	2	15	380
Sales price (I.D./unit)	65	70	55	45	. .	. .

علماً إن الكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة تعتمد مباشرة على زمن إشتغال الملكنة . المطلوب صياغة نموذج رياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتحقيق :

أ) أقل كلفة إجمالية. و ب) أعلى صافي ربح كلي .

تمارين الفصل الرابع

1- حول النماذج التالية إلى الصيغتين القانونية والقياسية :

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \max. \quad Z = X_1 - 3X_2 \\
& s.t. \quad -X_1 + 2X_2 \le 5 \\
& \qquad X_1 + 3X_2 = 10 \\
& \qquad X_1, X_2 \text{ unrestricted in sign}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad & \min. \quad Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \\
& s.t. \quad X_1 + X_2 + 3X_3 \le 40 \\
& \qquad X_1 + 9X_2 - 7X_3 \ge 50 \\
& \qquad 2X_1 + 3X_2 = 20 \\
& \qquad |5X_2 + 8X_3| \le 100 \\
& \qquad X_1, X_2 \ge 0, \quad X_3 \text{ unrest.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad & \min. \quad Z = -3X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 5X_4 \\
& s.t. \quad 4X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = -2 \\
& \qquad X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 \le 14 \\
& \qquad 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \ge 2 \\
& \qquad X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad X_3 \le 0 \quad , \quad X_4 \text{ unrest.}
\end{aligned}
$$

2- مصنع ينتج أربعة منتجات D , C , B , A بإستخدام ماكنتين M_2 , M_1 ، الزمن المستغرق وكلفة إنتاج وحدة واحدة على كل من الماكنتين والوقت المتاح للإشتغال لكل ماكنة وسعر البيع للوحدة الواحدة لكل منتج موضحة في الجدول أدناه :

machines	Time per unit (hours/unit)				Cost	Availability
	A	B	C	D	(I.D./hour)	hours
M_1	2	3	4	2	10	500
M_2	3	2	1	2	15	380
Sales price (I.D./unit)	65	70	55	45	. .	. .

علماً إن الكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة تعتمد مباشرة على زمن إشتغال الماكنة . المطلوب صياغة نموذج رياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتحقيق :

أ) أقل كلفة إجمالية. و ب) أعلى صافي ربح كلي .

3- صناعي يشغل أربعة مكائن لإنتاج نوعين من المنتجات ، الطاقة الإنتاجية للمكائن (وحدة/يوم) وكلف إشتغالهم موضحة في الجدول أدناه :

machines	Products		Operation Cost (I.D./day)
	I	II	
I	4	5	2000
II	6	3	2200
III	2	7	1800
IV	8	4	1600

قرر الصناعي إن إنتاجه من المنتوج الأول لا يقل عن *60* وحدة / إسبوع ، ولا يزيد إنتاجه من المنتوج الثاني عن *75* وحدة / إسبوع . أكتب النموذج الرياضي للبرمجة الخطية لتحديد عدد أيام الإشتغال لكل ملكنة خلال الإسبوع لتقليل إجمالي الكلف .

4- شركة تنتج نوعين من القبعات ،كل قبعة من النوع الأول تحتاج إلى ضعف الزمن المستغرق لإنتاج قبعة من النوع الثاني ، فإذا إقتصر الإنتاج على النوع الثاني فقط فللشركة إمكانية إنتاج *500* قبعة من هذا النوع .كما وإن دراسات السوق أشارت إلى إمكانية بيع *150* قبعة من النوع الأول و *250* قبعة من النوع الثاني . وإن الأرباح لكل قبعة من النوع الأول هي *8000* دينار و *5000* دينار من النوع الثاني . حدد عدد القبعات الممكن إنتاجها لكلا النوعين لتعظيم الأرباح .

(ans.: 125 , 250 , 2250000)

5- تقوم شركة بإنتاج أربعة أنواع من المكائن *A , B , C , D* تحتاج هذه الشركة إلى نوعين من المواد الأولية وإلى ساعات عمل معينة لإنتاج هذه المكائن وكما مبينة في الجدول أدناه :

	A	B	C	D
Raw material-I	8	14	10	6
Raw material-II	2	4	7	6
Labor time (hours)	2	1	3	1

يتوفر لدى الشركة *800* طن من المواد الأولية *RM-I* و*400* طن من المواد الأولية *RM-II* و *150* ساعة عمل / إسبوع . أما كلفة الطن الواحد من المواد الأولية *2000* و *4000* دينار على التوالي وكلفة ساعة العمل الواحدة فهي *1000* دينار وتباع المكائن الأربعة في الأسواق على التوالي *40000* و*60000* و*63000* و*45000* دينار / ملكنة . أوجد عدد المكائن الممكن إنتاجها من كل نوع لتعظيم الربح .

(ans.: 65 , 20 , 0 , 0 , 1210000)

6- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية بإستخدام الطريقة البيانية :

$$\begin{aligned} 1)\ \max.\ & Z = 4X + 3Y \\ s.t.\ & 2X + 3Y \le 6 \\ & -3X + 2Y \le 3 \\ & 2Y \le 5 \\ & 2X + Y \le 4 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \max.\ & Z = 3X + 2Y \\ s.t.\ & |Y - X| \le 2 \\ & X + Y \ge 1 \\ & X \le 4 \\ & Y \le 3 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)\ \min.\ & Z = 8X + 5Y \\ s.t.\ & X + 2Y \le 10 \\ & X \ge 5 \\ & Y \le 2 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4)\ \min.\ & Z = 2X + 3Y \\ s.t.\ & X + Y \le 15 \\ & X + 2Y \ge 10 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

(ans.: (X,Y,Z): 1)(3/2,1,9) , 2)(4,3,18) , 3) (5,0,40) , 4) (0,5,15))

7- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} 1)\ \max.\ & Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 5X_4 \\ s.t.\ & X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \le 46 \\ & 3X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \le 8 \\ & 2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 \le 10 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \min.\ & Z = X_1 - 3X_2 - 2X_3 \\ & 3X_1 - X_2 + 2X_3 \le 7 \\ & -2X_1 + 4X_2 \le 12 \\ & -4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \le 10 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(ans.: 1) (0,12/7,0,34/7; 26) , 2) (78/25,114/25,11/10; -319/25))

8- حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية الآتي بإعتبار إن المتغيرات X_4 , X_5 , X_6 متغيرات أساسية في الحل الإبتدائي الأساسي المقبول (S.B.F.S.) :

$$\begin{aligned} \max.\ & Z = 3X_1 + X_2 + 2X_3 \\ s.t.\ & 4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 3 \\ & 8X_1 + X_2 - 4X_3 + 2X_5 = 10 \\ & 3X_1 - X_6 = 0 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \ge 0 \end{aligned}$$

(ans.: (0,0,3/2,0,7/2,0;3))

9-حل نموذجي البرمجة الخطية التاليين :

$$\begin{aligned} 1)\ \min.\ & Z = 4X_1 + X_2 \\ s.t.\ & 3X_1 + X_2 = 3 \\ & 4X_1 + 3X_2 \ge 6 \\ & X_1 + 2X_2 \le 3 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \max.\ & Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3 \\ s.t.\ & X_1 + 2X_2 + X_3 = 3 \\ & 2X_1 - X_2 = 4 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(ans.: 1) (3/5,6/5;18/5) , 2) (2,0,1;5)) بإعتبار X_3 متغيرأساسي في الجدول الأولي.

الفصل الخامس

نموذجي النقل والتخصيص

5-1- نموذج النقل *Transportation Model* :

يعتبر نموذج النقل من أهم نماذج البرمجة الخطية في المنشآت الصناعية ، إذ يعتبر مكملاً للعملية الإنتاجية بهدف إمدادها لما تحتاج إليه من مستلزمات الإنتاج في الوقت والمكان المحددين .

يبحث هذا النموذج نقل سلعة ما من عدد من المصادر المتمثلة بمراكز عرض (مراكز تجهيز المواد الأولية للمنشآت) إلى مواقع مختلفة المتمثلة بمراكز الطلب (المنشآت الصناعية) بأقل التكاليف أو أقل زمن ممكن شرط أن يكون التجهيز عند كل مصدر والطلب عند كل موقع وكلفة نقل الوحدة الواحدة (أو الزمن المستغرق لنقل الوحدات) من كل مصدر إلى كل موقع معلومة ومحددة .

تعود الجذور التأريخية لنموذج النقل إلى عام *1941* عندما قدم هيتشكوك دراسته بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة " وفي عام *1947* قدم كوبمانس دراسته بعنوان " الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل " التي طورت من قبل دانتزك عام *1963* ، وفي عام *1951* درس دانتزك وأخرون طريقة التوزيع المعدل *Modify Distribution method (MODI)* للحصول على الحل الأمثل أما طريقة المسار المتعرج *Stepping Stone* فقد أقترحت من قبل شارنس وكوبر في عام *1954* . وفي عام *1955* توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام *Assignment problem* وهي حالة خاصة من مشكلة النقل وطورها كلٍ من فورد وفولكرسن في عام *1957* ، أما طريقة تقريب فوجل *V.A.M.* فقد أقترحت من قبل فوجل عام *1958* ، وطريقة *R.A.M.* فقد أقترحت من قبل روسيل في عام *1968* .

5-1-2- مشكلة النقل بأقل كلفة *The least cost transportation problem* :

بإفتراض وجود m من المصادر و n من المواقع وإن :

S_i تمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر i .

D_j تمثل عدد الوحدات المطلوبة عند الموقع j .

C_{ij} تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عند المسار (i, j) الذي يربط المصدر i بالموقع j .

X_{ij} تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j .

لذا فالهدف الرئيسي هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j بحيث تكون كلفة النقل الإجمالية أقل ما يمكن .

وبإفتراض إن الكلف خطية ، فنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يكون :

نموذجي النقل والتخصيص

5-1- نموذج النقل *Transportation Model* :

يعتبر نموذج النقل من أهم نماذج البرمجة الخطية في المنشآت الصناعية ، إذ يعتبر مكملاً للعملية الإنتاجية بهدف إمدادها لما تحتاج إليه من مستلزمات الإنتاج في الوقت والمكان المحددين .

يبحث هذا النموذج نقل سلعة ما من عدد من المصادر المتمثلة بمراكز عرض (مراكز تجهيز المواد الأولية للمنشآت) إلى مواقع مختلفة المتمثلة بمراكز الطلب (المنشآت الصناعية) بأقل التكاليف أو أقل زمن ممكن شرط أن يكون التجهيز عند كل مصدر والطلب عند كل موقع وكلفة نقل الوحدة الواحدة (أو الزمن المستغرق لنقل الوحدات) من كل مصدر إلى كل موقع معلومة ومحددة .

تعود الجذور التأريخية لنموذج النقل إلى عام ***1941*** عندما قدم هيتشكوك دراسته بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة " وفي عام ***1947*** قدم كوبمانس دراسته بعنوان " الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل " التي طورت من قبل دانتزك عام ***1963*** ، وفي عام ***1951*** درس دانتزك وأخرون طريقة التوزيع المعدل *Modify Distribution method (MODI)* للحصول على الحل الأمثل أما طريقة المسار المتعرج *Stepping Stone* فقد أقترحت من قبل شارنس وكوبر في عام ***1954*** . وفي عام ***1955*** توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام *Assignment problem* وهي حالة خاصة من مشكلة النقل وطورها كلٍ من فورد وفولكرسن في عام ***1957*** ، أما طريقة تقريب فوجل *V.A.M.* فقد أقترحت من قبل فوجل عام ***1958*** ، وطريقة *R.A.M.* فقد أقترحت من قبل روسيل في عام ***1968*** .

5-1-2- مشكلة النقل بأقل كلفة *The least cost transportation problem* :

بإفتراض وجود m من المصادر و n من المواقع وإن :

S_i تمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر i .

D_j تمثل عدد الوحدات المطلوبة عند الموقع j .

C_{ij} تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عند المسار (i, j) الذي يربط المصدر i بالموقع j .

X_{ij} تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j .

لذا فالهدف الرئيسي هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j بحيث تكون كلفة النقل الإجمالية أقل ما يمكن .

وبإفتراض إن الكلف خطية ، فنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يكون :

$$\begin{aligned} min. \quad & Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \\ & \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \\ & X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

في بعض الأحيان ، قد يكون مجموع العرض عند المصادر ومجموع الطلب عند المواقع غير متساويين . ففي هذه الحالة فالنموذج يكون غير متزن *unbalanced* ، ولتحقيق الإتزان نتبع :

1- إذا كان الطلب أكبر من العرض نضيف مصدر وهمي بحيث يجهز كمية النقص البالغة $\sum_j b_j - \sum_i a_i$.

2- إذا كان الطلب أصغر من العرض نضيف موقع وهمي لإمتصاص الكمية الفائضة والبالغة $\sum_i a_i - \sum_j b_j$.

وإن كلفة نقل الوحدة الواحدة من هذه المصادر او لهذه المواقع الوهمية تكون مساوية للصفر .

أما الخطوات الرئيسية المتبعة في حل نموذج النقل بأقل كلفة تكون :

1- نحدد الحل الإبتدائي الأساسي المقبول *S.B.F.S.* .

2- نحدد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية ، فإذا كانت كل المتغيرات تحقق شرط المثالية نتوقف ، وبعكسه نذهب للخطوة التالية .

3- نحدد المتغير الخارج (بإستخدام شرط المقبولية) من بين متغيرات الحل الأساسي الحالي ثم نجد الحل الأساسي الجديد ونعود للخطوة السابقة .

5-1-2- <u>طرق إيجاد الحل الإبتدائي الأساسي المقبول *S.B.F.S.*</u>: التي تعطينا حلاً يمكن الإنطلاق منه للوصول إلى الحل الأمثل ، وهي :

1- <u>طريقة الركن الشمالي الغربي *Northwest corner method*</u> : تعتبر هذه الطريقة ابسط الطرق إذ تبدأ بتعيين أعلى كمية مسموح بها من بين العرض والطلب للمتغير X_{11} (في أقصى الركن الشمالي الغربي من الجدول) ، أي إن $X_{11}=min.(a_1, b_1)$ ثم نستبعد العمود (الصف) المتحقق ومن ثم نساوي المتغيرات المتبقية للعمود (للصف) المستبعد بالصفر ، بعد تعديل كميات العرض والطلب لكل الصفوف والأعمدة غير المستبعدة نعين الخلية المقبولة العظمى للعنصر الأول غير المستبعد في العمود (الصف) الجديد وتكتمل هذه العملية عندما يكون بالضبط صف واحد أو عمود واحد غير مستبعد .

2- <u>طريقة الأقل كلفة *Least cost method*</u> : تكون أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ التكاليف بنظر الإعتبار ، اما الإسلوب المتبع في هذه الطريقة هو ان تحدد الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة للوحدة الواحدة ونستبعد العمود (الصف) المتحقق بعدئذٍ نعدل العرض والطلب لكل العناصر

غير المستبعدة ونكرر العملية بتحديد الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة للوحـ ـدة الواحـ ـدة غير ـر المستبعدة ونستمر بالحل حتى يتبقى لدينا صف (عمود) واحد غير مستبعد .

3- طريقة تقريب فوجل *Vogel's Approximation Method (V.A.M.)*: تكـ ـون هـ ـذه الطريقـ ـة أفضل من سابقتيها لأنها تعطينا حل أقرب للمثالية لكونها تاخذ كلف الجزاء بنظر الإعتبار ، وكمـ ـا موضحة في الخطوات التالية :

أ- نقدر كلفة الجزاء لكل عمود ولكل صف بطرح قيمة أقل كلفتين متتاليتين من نفـ ـس الـ ـصف أو العمود .

ب- نحدد الصف أو العمود الذي له أكبر كلفة جزاء ونخصص الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة في الصف أو العمود المختار ثم نعدل العرض والطلب بعد حذف الصف (العمود) المتحقق.

ج- 1. إذا بقي لدينا صف (عمود) واحد فقط غيـ ـر محـ ـذوف نحـ ـدد المتغيـ ـرات الأساسـ ـية فـ ـي الصف(العمود) بطريقة الأقل كلفة .

2. إذا كانت كل الصفوف والأعمدة غير المحذوفة لها عرض وطلب صفر سـ ـتحدد المتغيـ ـرات الأساسية الصفرية بطريقة الأقل كلفة .

3. وبعكسه ، نعيد إحتساب كلفة الجزاء للصفوف والأعمدة غير المحذوفة ثم نعود للخطوة (ب) (مع ملاحظة إن الصفوف والأعمدة التي عرضها وطلبها صفر لاتحتسب كلف جزائهم) .

مع ملاحظة إنه إذا تساوت لأكبر كلف الجزاء نختار من بينهم الصف (العمود) الذي فيه أقل كلفة نقل وإذا تساوت أقل كلف نقل أيضاً نختار من بينهم الصف (العمود) الذي ينقل لأكبر كمية وإذا مـ ـا تساوت لأكبر كمية نقل نختار الصف (العمود) بشكل عشوائي.

4- طريقة روسيل التقريبية *Russel's Approximation Method (R.A.M.)* : تعتبر هـ ـذه الطريقة أفضل من سابقاتها لأنها تعطينا حل إبتدائي أقرب للحل الأمثل (خصوصاً للمصفوفات الكبيرة) وخطواتها هي :

أ- تحديد أعلى كلفة نقل لكل صف (نرمز لها $\overline{a_i}$) ولكل عمود (نرمز لها $\overline{b_j}$) .

ب- نشكل مصفوفة جديدة كلفها هي : $\Delta_{ij} = C_{ij} - \overline{a_i} - \overline{b_j}$.

ج- نحدد الخلية التي لها أصغر كلفة نقل Δ_{ij} ، ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي $min.(a_i , b_j)$.

د- بحذف الصف (العمود) المتحقق وتغيير كمية تجهيز الصف أو طلب العمود الذي تقـ ـع فيه الخلية إلى مقدار الفرق بين كميتي التجهيز والطلب المقابلة لهما .

هـ - 1. إذا بقي صف (عمود) واحد نعطي الصف (العمـ ـود) المتبقـ ـي كميـ ـات الطلـ ـب والتجهيز المتبقية .

2. إذا بقي لأكثر من صف (عمود) واحد نعود للخطوة (أ) .

ملاحظـة عامة : لكل الطرق السابقة إذا تحقق عمود وصف معاً نحذف أحدهما فقط ونصفر الآخـر ، وهذا يضمن تعيين قيم صفرية للمتغيرات الأساسية .

5-1-3- طرق الوصول للحل الأمثل *Optimal Solution* :

تستخدم لإختبار ولتحسين الحل الأولي *S.B.F.S.* وصولاً للحل الأمثل ،بعد تحقق الشرط الأساسـي : عدد الخلايا الأساسية يساوي *m+n-1* بإعتبار *n* تمثل عدد الأعمدة و *m* عدد الصفوف .

ومن هذه الطرق :

1- طريقة المسار المتعرج *Stepping Stone method* : لتحديد المتغيرات الداخلة والخارجـة ، نحدد حلقة مغلقة لكل متغير غير أساسي تبدأ وتنتهي الحلقة عنده. تتكـون هـذه الحلقـة مـن مستقيمات أفقية وعمودية متتابعة على شكل أجزاء نهاية تقاطعها يجب أن تكون متغيرات أساسية بإستثناء البداية والنهاية تكون عند متغير غير أساسي ، أي إن عنصر كل ركن من أركان الحلقة يجب أن يكون مربع يحتوي على متغير أساسي ، لايختلف الحل فيما إذا كان مسار الحلقة بإتجاه عقرب الساعة أم بعكسه ، ومن الملاحظ إنه في الحل الأساسي فلكل متغير غير أساسـي حلقـة وحيدة .

تستخدم هذه الحلقات للتاكد فيما إذا كانت قيمة دالة الهدف ستتحسن عندما تزداد قيمة المتغيـر غير الأساسي لأكثر من قيمته الصفرية الحالية بمقدار وحدة واحدة وللحفاظ على الحـل المقبـول نطرح ونضيف لعناصر اركان الحلقة بالتناوب وحدة واحدة بحيث نحافظ على تحقق قيود العرض والطلب وعندئذٍ نحسب صافي الزيادة او النقصان في الكلفة $\overline{C}_{ij}$ نتيجة زيادة وحدة واحـدة مـن كمية هذا المتغير غير الأساسي . فإذا كانت $\overline{C}_{ij}$ موجبة فهذا يعني إنها ستزيد من كلفة النقل وإذا كانت سالبة فمعنى ذلك إنها ستخفض كلفة النقل ، وفي هذه الحالة سنختار المتغير الداخل الذي له لكبرقيمة سالبة (شرط المثالية في الطريقة المبسطة) . أما المتغير الخارج فنختاره مـن بـين متغيرات أركان الحلقة التي ستأخذ الإشارة السالبة (المتغيرات التي تتناقص نتيجة زيادة المتغير غير الأساسي) والذي له أقل قيمة لأن قيمته ستصل الصفر وأي تناقص آخر سيؤدي بـه إلـى السالب (شرط المقبولية في الطريقة المبسطة) ، ثم نعطي قيمة المتغير الخارج للمتغير الـداخل ونحتسب الكلفة الأخيرة ونعيد الكرة مرة أخرى حتى نحصل على الحل الأمثل .

2- طريقة المضاعفات *Multipliers method* : وتسمى هذه الطريقة بطريقـة التوزيـع المعـدل *Modified Distribution method (MODI)* وخطوات هذه الطريقة هي نفـسها خطـوات الطريقة السابقة لكن الإختلاف الرئيسي بينهما يتعلق بالطريقة التي تقدر خلايا المتغير الأساسي . وتستند هذه الطريقة على النظرية البديلة *Duality theory* .

يشترك مع كل صف i في جدول النقل المضاعف U_i ومع كل عمود j المضاعف V_j وتكتـب المعادلة لكل متغير أساسي X_{ij} في الحل الحالي :

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

فيتشكل لنا $(m+n-1)$ من المعادلات (لوجود $(m+n-1)$ من المتغيرات الأساسية) لها $(m+n)$ من المجاهيل ، ويمكننا تقدير قيم المضاعفات من هذه المعادلات بإفتراض قيمة عشوائية لأحد المضاعفات (عادةً نفترض $U_1=0$) ومن ثم نحل المعادلات التي سيكون عددها مساوي لعدد مجاهيلها وبعدئذٍ نقدر الكلفة الجديدة $\overline{C}_{pq}$ لكل متغير غير أساسي X_{pq} فيكون :

$$\overline{C}_{pq} = C_{pq} - (U_p+V_q)$$

فهذه القيم هي نفس القيم التي حصلنا عليها من الطريقة السابقة بغض النظر عن الإختيار العشوائي لأحد المضاعفات . لذا نختار المتغير الداخل بحيث يكون لأكبر قيمة سالبة إلى $\overline{C}_{pq}$ (شرط المثالية في الطريقة المبسطة) وبإستخدام الحلقة المغلقة للمتغير الداخل كما وضحت سابقاً ونحدد المتغير الخارج الذي له أقل كلفة للخلايا التي تأخذ الإشارة السالبة في الحلقة (شرط المقبولية في الطريقة المبسطة) .

مثال-1 : الخزانات الثلاثة S_3 , S_2 , S_1 يمكنها ضخ 15 ، 20 و 25 مليون لتر ماء صافي يومياً تمد الأربعة مدن C_4 , C_3 , C_2 , C_1 وإحتياجاتها 8 ، 10 ، 12 و 15 مليون لتر ماء صافي يومياً . المطلوب التوصل إلى ترتيب نقل الماء الصافي بين الخزانات الثلاثة والمدن الأربعة بأقل التكاليف الكلية للنقل (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لايسبب أية كلفة) إستناداً لكلف النقل (لكل مليون لتر)المبينة في الجدول أدناه :

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	2	3	4	5
S_2	3	2	5	2
S_3	4	1	2	3

الحل : بسبب عدم التوازن لأن مجموع كميات الضخ $(25+20+15=60)$ أكبر من مجموع كميات الطلب $(8+10+12+15=45)$ ، لذا نضيف مدينة وهمية C_5 تكون كلف نقل الماء الصافي إليها مساوي للصفر وكمية تجهيزها $(60-45=15)$ مليون لتر ماء صافي .

1- إيجاد الحل الأولي S.B.F.S. – نستخدم إحدى الطرق الأربعة التالية :

أ- طريقة الركن الشمالي الغربي –

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	(2) 8	(3) 7	(4)	(5)	(0)	15
S_2	(3)	(2) 3	(5) 12	(2) 5	(0)	20
S_3	(4)	(1)	(2)	(3) 10	(0) 15	25
Demand	8	10	12	15	15	60

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل هي :

$$T.T.C. = 2*8 + 3*7 + 2*3 + 5*12 + 2*5 + 3*10 + 0*15 = 143$$

ب- بإستخدام طريقة الأقل كلفة :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل ستكون :

$$T.T.C. = 2*0 + 0*15 + 3*5 + 2*15 + 4*3 + 1*10 + 2*12 = 91$$

ج- بإستخدام طريقة فوجل VAM :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply	P.C.
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15	2 1 1 3
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20	2 0 0 1 1
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25	1 1 2 1 1
Demand	8	10	12	15	15	60	
P.C.	1 1 1 1 1	1 1 1	2 2 2	1 1 1 1 1	0		

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل ستكون :

$$T.T.C. = 2*0 + 0*15 + 3*5 + 2*15 + 4*3 + 1*10 + 2*12 = 91$$

د- بإستخدام طريقة روسيل *RAM* :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	[2] 8	[3]	[4]	[5]	[0] 7	15
S_2	[3]	[2]	[5]	[2] 15	[0] 5	20
S_3	[4]	[1] 10	[2] 12	[3]	[0] 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

الجدول النهائي لهذه الطريقة أستخرج إستناداً للجداول أدناه :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	-7	-5	-6	-5	-5
S_2	-6	-6	-5	$\underline{-8}$	-5
S_3	-4	-6	-7	-6	-4

تملأ الخلية X_{24} ويحذف الموقع C_4 :

	C_1	C_2	C_3	C_5
S_1	-6	-4	-5	-4
S_2	-6	-6	-5	-5
S_3	-4	-6	$\underline{-7}$	-4

تملأ الخلية X_{33} ويحذف الموقع C_3 :

	C_1	C_2	C_5
S_1	-5	-3	-3
S_2	-4	-4	-3
S_3	-4	$\underline{-6}$	-4

تملأ الخلية X_{32} ويحذف الموقع C_2 :

	C_1	C_5
S_1	-4	-2
S_2	-4	-3
S_3	-4	$\underline{-4}$

تملأ الخلية X_{35} ويحذف المصدر S_3 :

	C_1	C_5
S_1	-3	-2
S_2	-3	$\underline{-3}$

تملأ الخلية X_{25} ويحذف المصدر S_2 ، لذا تعطى القيم المتبقية للخليتين البـ اقيتين X_{15} , X_{11} لبقاء صف واحد .

$$T.T.C. = 2*8 + 0*7 + 2*15 + 0*5 + 1*10 + 2*12 + 0*3 = 80$$

ومما تقدم اعلاه ، نلاحظ إن الكلفة الإجمالية للنقل بإستخدام الطرق الأربعة كانت مختلفة وكالآتي :

الركن الشمالي الغربي (143) > الأقل كلفة (91) $\leq$ فوجل *VAM* (91) > روسيل *RAM* (80) .

لذا فغالباً ما تكون طريقة روسيل *RAM* هي الأفضل وتليها طريقة فوجل *VAM* .

إستناداً للحل الأولي *S.B.F.S.* الذي حصلنا عليه بالطريقة الثالثة *VAM* (بالرغم من إنه من الأفضل إستخدام الطريقة الرابعة *RAM* لكونها أفضل الطرق ، ولكن بسبب إستعراض طرق الحل الأمثل تم إختيار هذه الطريقة) ولغرض الوصول للحل الأمثل لابد من إستخدام <u>إحدى</u> الطريقتين التاليتين لإختبار وتحسين الحل وبعد تحقق الشرط الأساسي :

No. of basic cells = m+n-1 = 5+3-1=7

2- إيجاد الحل الأمثل *Optimal solution* : نستخدم إحدى الطريقتين :

أ- طريقة المسار المتعرج *Stepping stone* : وكما تطرقنا سابقاً ، نجد المسارات المتعرجة لكل الخلايا غير الأساسية وكذلك صافي الزيادة في الكلفة $\overline{C}_{ij}$ لكل مسار .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3-1+4-2=4$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4-2+4-2=4$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{21} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5-2+3-2=4$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2-1+4-3=2$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5-2+4-3=4$$
$$X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{25} = 0-0+2-3=-1$$
$$X_{34} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{31} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3-2+3-4=0$$
$$X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{31} \quad : \quad \overline{C}_{35} = 0-0+2-4=-2 \text{ most negative}$$

لكون القيمة الأكثر سالبية هي $\overline{C}_{35}$ لذا فالمتغير الداخل ***entering variable*** هو المتغير X_{35} . أما المتغير الخارج ***leaving variable*** فيتحدد من المسار المتعرج للمتغير الداخل : $\overset{+}{X}_{35} \to \overset{-}{X}_{15} \to \overset{+}{X}_{11} \to \overset{-}{X}_{31}$ والذي له أقل كمية نقل X_{ij} من الخلايا الـ سالبة ، أي إن المتغير X_{31} سيكون هو المتغير الخارج ، لذا فالجدول الجديد سيكون كما يلي :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	3 (2)	(3)	(4)	(5)	12 (0)	15
S_2	5 (3)	(2)	(5)	15 (2)	(0)	20
S_3	(4)	10 (1)	12 (2)	(3)	3 (0)	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 6 + 0 + 15 + 30 + 10 + 24 + 0 = 85

No. of basic cells = 5 + 3 – 1 = 7

$X_{12} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{15}$: $\overline{C}_{12} = 3 - 1 + 0 - 0 = 2$

$X_{13} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{15}$: $\overline{C}_{13} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$

$X_{14} \to X_{24} \to X_{21} \to X_{11}$: $\overline{C}_{14} = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$

$X_{22} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{21}$: $\overline{C}_{22} = 2 - 1 + 0 - 0 + 2 - 3 = 0$

$X_{23} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{21}$: $\overline{C}_{23} = 5 - 2 + 0 - 0 + 2 - 3 = 2$

$X_{25} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{15}$: $\overline{C}_{25} = 0 - 3 + 2 - 0 = -1$ *negative*

$X_{31} \to X_{11} \to X_{15} \to X_{35}$: $\overline{C}_{31} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$

$X_{34} \to X_{24} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{15} \to X_{35}$: $\overline{C}_{34} = 3 - 2 + 3 - 2 + 0 - 0 = 2$

لذا فالمتغير الداخل هو X_{25} والمتغير الخارج سيكون X_{21} ، وعليه فالجدول الجديد سيكون :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	8 (2)	(3)	(4)	(5)	7 (0)	15
S_2	(3)	(2)	(5)	15 (2)	5 (0)	20
S_3	(4)	10 (1)	12 (2)	(3)	3 (0)	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80

No. of basic cells = 7

$$X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3 - 1 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{14} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{25} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5 - 2 + 0 - 0 = 3$$
$$X_{21} \rightarrow X_{25} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{21} = 3 - 0 + 0 - 2 = 1$$
$$X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2 - 1 + 0 - 0 = 1$$
$$X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5 - 2 + 0 - 0 = 3$$
$$X_{31} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4 - 0 + 0 - 2 = 2$$
$$X_{34} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{25} \rightarrow X_{24} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3 - 0 + 0 - 2 = 1$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ لذا فالحل أمثل وعليه فإنه :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى *8* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة *15* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير *10* و*12* مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

2- طريقة المضاعفات *Multipliers method* : وكما ذكرنا سابقاً ، نجد قيم V_j , U_i من العلاقة التالية : $U_i + V_j = C_{ij}$ للخلايا الأساسية ، وبإفتراض إن : $U_1=0$ ، وإستناداً للحل الأولي المستخرج بطريقة *VAM* فإن :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	(2) 0	(3)	(4)	(5)	(0) 15	15
S_2	(3) 5	(2)	(5)	(2) 15	(0)	20
S_3	(4) 3	(1) 10	(2) 12	(3)	(0)	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 91 **and** ***no. of basic cells = 7***

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 2 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_1 = 2$$
$$C_{15} = U_1 + V_5 = 0 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_5 = 0$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 = 3 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_2 = 1$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 2 \overset{U_2=1}{\Rightarrow} V_4 = 1$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_3 = 2$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 = 1 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_2 = -1$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 2 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_3 = 0$$

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3 - 1 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{25} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5 - 2 + 0 - 0 = 3$$
$$X_{21} \to X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{21} = 3 - 0 + 0 - 2 = 1$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2 - 1 + 0 - 0 = 1$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5 - 2 + 0 - 0 = 3$$
$$X_{31} \to X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4 - 0 + 0 - 2 = 2$$
$$X_{34} \to X_{35} \to X_{25} \to X_{24} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3 - 0 + 0 - 2 = 1$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ لذا فالحل أمثل وعليه فإنه :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى *8* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة *15* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير *10* و*12* مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

2- طريقة المضاعفات *Multipliers method* : وكما ذكرنا سابقاً ، نجد قيم V_j , U_i من العلاقة التالية : $U_i + V_j = C_{ij}$ للخلايا الأساسية ، وبإفتراض إن : $U_1=0$ ، وإستناداً للحل الأولي المستخرج بطريقة *VAM* فإن :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	[2] 0	[3]	[4]	[5]	[0] 15	15
S_2	[3] 5	[2]	[5]	[2] 15	[0]	20
S_3	[4] 3	[1] 10	[2] 12	[3]	[0]	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 91 and no. of basic cells = 7

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 2 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_1 = 2$$
$$C_{15} = U_1 + V_5 = 0 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_5 = 0$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 = 3 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_2 = 1$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 2 \overset{U_2=1}{\Rightarrow} V_4 = 1$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_3 = 2$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 = 1 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_2 = -1$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 2 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_3 = 0$$

أما الخلايا غير الأساسية فنجد لها $\overline{C}_{ij}$ من العلاقة $\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ وكما يلي :

$$\overline{C}_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + (-1)) = 4$$
$$\overline{C}_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 0) = 4$$
$$\overline{C}_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 5 - (0 + 1) = 4$$
$$\overline{C}_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 2 - (0 - 1) = 2$$
$$\overline{C}_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 5 - (1 + 0) = 4$$
$$\overline{C}_{25} = C_{25} - (U_2 + V_5) = 0 - (1 + 0) = -1$$
$$\overline{C}_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 3 - (2 + 1) = 0$$
$$\overline{C}_{35} = C_{35} - (U_3 + V_5) = 0 - (2 + 0) = -2 \text{ most negative}$$

وهي نفس القيم المستخرجة في الطريقة السابقة . فالمتغير الداخل سيكون المتغير الأكثر سـ ـالبية لقيم $\overline{C}_{ij}$ وهو المتغير X_{35} ، أما المتغير الخارج فيتحدد بنفس الإسلوب السابق من خلال المسار المتعرج للمتغير الداخل $\overset{+}{X}_{35} \to \overset{-}{X}_{15} \to \overset{+}{X}_{11} \to \overset{-}{X}_{31}$ والخلية التي لها أقل كمية نقل من الخلايا السالبة ستحدد كمتغير خارج أي المتغير X_{31} ، أما الجدول الجديد سيكون :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 3	3	4	5	0 12	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4	1 10	2 12	3	0 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 6 + 0 + 15 + 30 + 10 + 24 + 0 = 85

No. of basic cells = m + n – 1 = 3 + 5 – 1 = 7

يمكن إجراء العمليات الحسابية لإستخراج قيم $\overline{C}_{ij}$ بشكل مباشر على الجدول وكما مثبتة في المربع السفلي لكل خلية غير أساسية في الجدول أدناه :

		$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=1$	$V_5=0$	
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
$U_1=0$	S_1	2 3	3 2	4 2	5 4	0 12	15
$U_2=1$	S_2	3 5	2 0	5 2	2 15	0 -1	20
$U_3=0$	S_3	4 2	1 10	2 12	3 2	0 3	25
Demand		8	10	12	15	15	60

وعليه فالمتغير الداخل هو X_{25} بإعتبار له قيمة $\overline{C}_{ij}$ سالبة ، أما المتغير الخارج X_{21} فيتحدد من المسار المتعرج لهذا المتغير الداخل ، أما الجدول الجديد سيكون :

		$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=2$	$V_5=0$	***Supply***
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$U_1=0$	S_1	$\boxed{2}$ 8	$\boxed{3}$ $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ $\boxed{2}$	$\boxed{5}$ $\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 7	15
$U_2=0$	S_2	$\boxed{3}$ $\boxed{1}$	$\boxed{2}$ $\boxed{1}$	$\boxed{5}$ $\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 15	$\boxed{0}$ 5	20
$U_3=0$	S_3	$\boxed{4}$ $\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{2}$ 12	$\boxed{3}$ $\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 3	25
Demand		8	10	12	15	15	60

$$T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ (المثبتة قيمها في المربع السفلي للخلايا غير الأساسية في الجدول أعلاه) ، لذا فالحل أمثل . وعليه فإن :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى ***8*** مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة ***15*** مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير ***10*** و***12*** مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

وعليه فالمتغير الداخل هو X_{25} بإعتبار له قيمة $\overline{C}_{ij}$ سالبة ، أما المتغير الخارج X_{21} فيتحدد من المسار المتعرج لهذا المتغير الداخل ، أما الجدول الجديد سيكون :

		$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=2$	$V_5=0$	Supply
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$U_1=0$	S_1	2	3	4	5	0	
		8	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	7	15
$U_2=0$	S_2	3	2	5	2	0	
		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	15	5	20
$U_3=0$	S_3	4	1	2	3	0	
		$\boxed{2}$	10	12	$\boxed{1}$	3	25
Demand		8	10	12	15	15	60

$$T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ (المثبتة قيمها في المربع السفلي للخلايا غير الأساسية في الجدول أعلاه) ، لذا فالحل أمثل . وعليه فإن :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى **8** مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة **15** مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير **10** و**12** مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

5-2- نموذج التخصيص ***Assignment model*** :

تعد حالة خاصة من حالات النقل وتتمثل بوجود *n* من الأعمال (المهام) ***Jobs*** يمكن تمثيل كلٍ منها بواسطة أي من ألإمكانيات المتاحة (المكائن ***machines***) البالغ عددها *m* المختلفة فيما بينها في كلفة أو وقت أو ربح او كفاءة التمثيل لكل عمل او مهمة إذ يطلب إختيار أحد الإمكانيات المتاحة المناسبة لتنفيذ كل مهمة بأدنى كلفة أو وقت ممكن أو بأعلى ربح او كفاءة ممكنة وهكذا.

يوجد لكثر من طريقة لحل مشكلة التخصيص ولكننا سنركز على أهم هذه الطرق ألا وهي الطريقة الهنكارية ، وكخطوة أولى لهذه الطريقة يجب تحقيق توازن المصفوفة (عدد المهام = عدد الإمكانيات) أي إن $m = n$ وبخلافه نضيف $(m - n)$ من المهام الوهمية إذا كانت $(n<m)$ أو نضبف $(n-m)$ من الإمكانيات الوهمية إذا كانت $(n>m)$.أما الكلف أو الربح لهذه المهام أو الإمكانيات الوهمية فتكون أصفار .

أما الخوارزمية المتبعة في هذه الطريقة فهي :

أ- <u>في حالة التصغير *minimized*</u> : نتبع الخطوات التالية :

1. نطرح اصغر قيمة في كل صف من قيم هذا الصف فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا الصف لأي من أعمدة المصفوفة .
2. نطرح أصغر قيمة في كل عمود من قيم هذا العمود فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا العمود لأي من صفوف المصفوفة .
3. نغطي اصفار المصفوفة كافة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو العمودية أو كليهما، فإذا كان عدد تلك الخطوط مساوياً لعدد صفوف (أعمدة) المصفوفة فالتخصيص سيكون أمثل .
4. إذا كان عدد هذه الخطوط أقل من عدد الصفوف (الأعمدة) نختار أقل قيمة في المصفوفة من القيم غير المغطاة بالخطوط ويطرح من كل قيمة من القيم غير المغطاة ويضاف إلى كل قيمة تقع عند ملتقى الخطين الأفقي والعمودي ، أما بقية القيم (المغطاة ولاتمثل التقاطع) فتترك كما هي .
5. تعاد الخطوة (2) حتى يتحقق التوزيع الأمثل .

ب- <u>في حالة التعظيم *maximized*</u> : يمكن تحويلها إلى حالة التصغير من خلال طرح كل قيمة من قيم المصفوفة من أكبرقيمة فيها ونستمر بالخوارزمية السابقة لإيجاد التخصيص الأمثل .

مثال-2 : المصفوفة التالية توضح كلف توزيع أربعة مهام على خمسة مكائن :

jobs	machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	10	11	4	2	8
J2	7	11	10	14	12
J3	5	6	9	12	14
J4	13	15	11	10	7

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لتقليل الكلف .

الحل : لعدم توازن مصفوفة الكلف ولكون عدد المهام $=4$ < عدد المكائن $=5$ ، لذا نضيف مهمة خامسة كلفها مساوية للصفر وعليه فالمصفوفة ستكون :

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	10	11	4	2	8
J2	7	11	10	14	12
J3	5	6	9	12	14
J4	13	15	11	10	7
J5	0	0	0	0	0

بطرح أقل كلفة في كل صف ⟵

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	8	9	2	0	6
J2	0	4	3	7	5
J3	0	1	4	7	9
J4	6	8	4	3	0
J5	0	0	0	0	0

بطرح أقل كلفة في كل عمود من قيم العمود نفسه تبقى المصفوفة كما هي .

إن أقل عدد للمستقيمات الأفقية والعمودية التي تغطي الأصفار $=4$ < عدد الصفوف (الأعمدة) للمصفوفة $=5$. لذا نطرح أقل قيمة من القيم المغطاة (أي يطرح 1) من القيم غير المغطاة وتضاف إلى التقاطعات فقط . فتصبح المصفوفة :

أقل عدد من المستقيمات = عدد الصفوف $=5$

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	9	9	2	0	7
J2	0	3	2	6	5
J3	0	0	3	6	9
J4	6	7	3	2	0
J5	1	0	0	0	1

لذا فالحل أمثل وعليه فإن توزيع الأصفار يكون :

Jobs	Machines
J1	M4
J2	M1
J3	M1 , M2
J4	M5
J5	M2 , M3 , M4

بحذف الماكنة *1* من المهمة *3* لأنها أشغلت من قبل المهمة *2* وكذلك حذف الماكنتين *2* و *4* من المهمة *5* لأنها اشغلت من قبل المهمتين *3* و *1* على التوالي ، لذا فالتخصيص الأمثل للمهام سيكون :

تنجز المهمة *1* على الماكنة *4* وبكلفة *2*

تنجز المهمة *2* على الماكنة *1* وبكلفة *7*

تنجز المهمة *3* على الماكنة *2* وبكلفة *6*

تنجز المهمة *4* على الماكنة *5* وبكلفة *7* ← إجمالي الكلف *22* .

أي بأقل كلفة إجمالية هي *22* ، علماً بأن الماكنة *3* لاتعطى لها أي مهمة .

<u>مثال-3</u> : المصفوفة التالية تمثل ربح توزيع أربعة مهام على أربعة مكائن :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	10	3	2	4
J2	9	4	1	3
J3	8	5	1	5
J4	7	6	2	6

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للمهام على المكائن لتحقيق أعلى ربح ممكن .

<u>الحل</u> : بطرح جميع قيم المصفوفة من أكبر قيمة فيها (أي *10*) لتحويلها إلى حالة التصغير ، فتكون المصفوفة الجديدة :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	7	8	6
J2	1	6	9	7
J3	2	5	9	5
J4	3	4	8	4

بطرح أقل قيمة في كل صف →

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	7	8	6
J2	0	5	8	6
J3	0	3	7	3
J4	0	1	5	1

بطرح أقل قيمة في كل عمود

→

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	6	3	5
J2	0	4	3	5
J3	0	2	2	2
J4	0	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات =*2* < عدد الصفوف (الأعمدة) =*4* ، لذا تطرح *2* من القيم المغطاة وتضاف إلى التقاطع وعليه فالمصفوفة الجديدة ستكون :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	4	1	3
J2	0	2	1	3
J3	0	0	0	0
J4	2	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات = *3* < عدد الصفوف (الأعمدة) = *4* ، لذا نطرح *1* من القيم غير المغطاة وتضاف لقيم التقاطع ، فتكون المصفوفة الجديدة :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	3	0	2
J2	0	1	0	2
J3	1	0	0	0
J4	3	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات = عدد الصفوف (الأعمدة) = *4* ، لذا فالحل أمثل وعليه فالتخصيص الأمثل سيكون :

Jobs	Machines
J1	M1 , M3
J2	M1 , M3
J3	M2 , M3 , M4
J4	M2 , M3 , M4

Jobs	Mach.	profit
J1	M1	10
J2	M3	1
J3	M2	5
J4	M4	6
$\sum$		22

or

Jo.	Ma.	Pr.
J1	M1	10
J2	M3	1
J3	M4	5
J4	M2	6
$\sum$		22

or

Jo.	Ma.	Pr.
J1	M3	2
J2	M1	9
J3	M2	5
J4	M4	6
$\sum$		22

or

Jo.	Mach.	Pr.
J1	M3	2
J2	M1	9
J3	M4	5
J4	M2	6
$\sum$		22

أي وجود أربعة تخصيصات مثلى للمهام على المكائن لتحقيق أعلى ربح ممكن وقدره *22* وحدة نقدية وكما مثبتة أعلاه .

تمارين الفصل الخامس

1- أوجد الحل الأمثل لمسائل النقل التالية :

a)

Sources	D1	D2	D3	Supply
S1	1	2	6	7
S2	0	4	2	12
S3	3	1	5	11
Demand	10	10	10	30

b)

Sources	D1	D2	D3	Supply
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
Demand	9	10	11	30

c)

Sou.	D1	D2	D3	Sup.
S1	5	1	7	10
S2	6	4	6	80
S3	3	2	2	15
Dem.	75	20	50	

Sou.	D1	D2	D3	D4	Sup.
S1	10	20	5	7	10
S2	13	9	12	8	20
S3	4	15	7	9	30
S4	14	7	1	0	40
S5	3	12	5	19	50
Dem.	60	60	20	10	150

(ans. : a)(7,0,0,2,0,10,1,10,0;40) , b)(2,10,0,3,0,11,4,0,0;38) ,
c)(0,10,0,35,10,35,0,0,15,40,0,0;500) ,
d)(0,0,10,0,0,20,0,0,30,0,0,0,0,30,0,10,30,10,10,0;820))

2- تشحن سلع من أربعة مخازن *W1 , W2 , W3 , W4* إلى خمسة أسواق *M5 , M4 , M3 , M2 , M1* . العرض عند المخازن هو 70 ، 40 ، 60 و30 وحدة على التوالي . بينما الطلب عند الأسواق هو 40 ، 20 ، 30 ، 60 و50 وحدة على التوالي . أما كلف النقل بين المخازن والأسواق فهي :

Warehouses	M1	M2	M3	M4	M5
W1	7	6	5	4	2
W2	9	7	3	6	3
W3	8	8	7	3	1
W4	4	3	1	2	1

أوجد الكمية المشحونة المثلى من المخازن إلى الأسواق بأقل كلفة إجمالية ممكنة .

(ans.: (30,0,0,40,0,0,0,30,0,10,0,0,0,20,40,10,20,0,0,0;690))

3− حل مسألة النقل التالية ، بحيث الطلب عند الموقع *D1* يجب أن يشحن من المصدر *S4* :

Sources	Destinations			Supply
	D1	D2	D3	
S1	5	1	0	20
S2	3	2	4	10
S3	7	5	2	15
S4	9	6	0	15
Demand	5	10	15	

(ans.: (0,10,5,5,5,0,0,0,10,0,0,0,15,5,0,10,0;55))

4− أربعة أصناف مختلفة من المكائن تتوزع على خمسة مهام ن ع دد المك ائن المت وفرة ف ي الأصناف الأربعة هي *25* ، *30* ، *20* و *30* ، وعدد الوظائف في المهام الخمسة ه ي *20* ، *20* ، *30* ، *10* و*25* . أوجد التخصيص الأمثل للمكائن على المهام بحيث إن صنف الملكنة الرابع ـة *M4* لايأخذ المهمة الرابعة *J4* . علماً إن الكلف لكل وحدة موضحة في الجدول التالي :

machines	Jobs				
	J1	J2	J3	J4	J5
M1	10	2	3	15	9
M2	5	10	15	2	4
M3	15	5	14	7	15
M4	20	15	13	----	8

(ans.:(0,0,25,0,0,20,0,0,10,0,0,20,0,0,0,0,0,5,0,25;560))

5− أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع المهام على المكائن لمصفوفتي الكلف التاليتين :

a)

Jobs	machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	10	5	5	2
J2	9	8	4	3
J3	7	7	6	4
J4	8	7	5	5

b)

Jobs	Machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	3	8	2	10	3
J2	8	7	2	9	7
J3	6	4	2	7	5
J4	8	4	2	3	5
J5	9	10	6	9	10

(ans.:a) 1-2,2-4,3-1,4-3 or 1-4,2-3,3-1,4-2;20, b) 1-5 , 2-3 , 3-2 , 4-4 , 5-1 ;21)

6− أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع المهام على المكائن لمصفوفة الربح التالية :

Jobs	Machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	3	9	2	3	7
J2	6	1	5	6	6
J3	9	4	7	10	3
J4	2	5	4	2	1
J5	9	6	2	4	6

(ans.:1-2 , 2-5 , 3-4 , 4-3 , 5-1 ;38)

7- أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع أربعة عمليات على أربعة مكائن ، إذا كانت العملية *P1* لاتأخذ الملكنة *M3* ، والعملية *P3* لاتأخذ الملكنة *M4* ، علماً إن مصفوفة الكلف هي :

Processes	machines			
	M1	M2	M3	M4
P1	5	5	---	2
P2	7	4	2	3
P3	9	3	5	---
P4	7	2	6	7

(ans.: 1-4 , 2-3 , 3-2 , 4-1 ; 14)

8- لتوزيع أربعة مهندسين على أربعة خطوط إنتاجية ، علماً بأن مصفوفة كلف التوزيع كانت :

Engineering	Lines			
	L1	L2	L3	L4
E1	8	9	6	4
E2	5	7	7	8
E3	10	11	6	8
E4	3	9	5	7

المطلوب:

أ- أوجد التخصيص الأمثل للتوزيع .

ب- إذا تدخل مدير المصنع وقرر منع إستلام المهندس الأول *E1* للخط الإنتاجي الرابع *L4* .ما هي الكلفة الإضافية التي يتحملها المصنع نتيجة هذا القرار .

(ans.: a)1-4 , 2-2 , 3-3 , 4-1;20 , b)1-3 , 2-2 , 3-4 , 4-1 ; 24 ; 4)

الفصل السادس

المخططات الشبكية *Network planning*

6-1- المسار الحرج *Critical Path* :

تستخدم هذه المخططات بشكل واسع للسيطرة على مراحل إقامة المشاريع وتنفيذها وكذلك في مراحل تصنيع أو تجميع السلع ويجري ذلك من خلال تحليل وتنسيق النشاطات والفعاليات الضرورية للإنتاج على هيئة شبكات أعمال مترابطة وجداول لأجل توجيه تنفيذ هذه الأعمال .

وبشكل عام فإن عناصر رسم وتكوين المخططات الشبكية وإعداد الجداول الزمنية للمتابعة وفرض الرقابة هي :

- الحدث *Event* : ويشار إليه بدائرة يرقم كلٍ منها برقم خاص لا يجوز تكراره ويدل على ترتيب الحدث فقط ولكل شبكة حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد ولا يحتاج الحدث إلى وقت او موارد لتنفيذه.
- النشاط *Activity* : ويشار إليه بسهم واحد ولا يجوز أيضاً تمثيل أي نشاط بأكثر من سهم ، وإن أي نشاط يحتاج لوقت وموارد لأجل تنفيذه ويوضع الوقت اللازم لإنجاز النشاط *Duration* عادةً فوق كل سهم ، مع ملاحظة إنه لا توجد علاقة بين طول السهم والفترة اللازمة لتنفيذه . يكون لكل نشاط حدث بداية وحدث نهاية ويمكن أن يشترك نشاطان في نفس حدث البداية ولكن حدث النهاية يكون مختلف لكلٍ منهما ، أو يمكن ان يشترك نشاطان في نفس حدث النهاية ولكن حدث البداية يكون مختلف لكلٍ منهما ، ولايجوز أن يشترك نشاطان في نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية .
- المسار *Path* : ويمثل سلسلة من الأسهم المتعاقبة تبدأ بحدث البداية وتنتهي بحدث النهاية ويميز كل مسار عادةً بأرقام الأحداث التي يمر بها ، والمسار الذي يستغرقه أطول الأزمنة يدعى بالمسار الحرج *Critical Path (C.P.)* وتتميز أنشطة هذا المسار بكونها أنشطة حرجة إذ إن أي تأخير يحصل إثناء تنفيذ أي من أنشطته يؤدي إلى تأخير تنفيذ العمل وعليه فإن وقت المسار الحرج يحدد المدة اللازمة لإتمام العمل .

لحساب زمن المسار الحرج *C.P.time* يكون ضمن مرحلتين :

المرحلة الأولى – وتسمى العبور الأمامي *Forward pass* حيث تبدأ الحسابات من نقطة البداية بإتجاه نقطة البداية بإتجاه نقطة النهاية وعند كل نقطة يحسب الوقت المبكر *Earliest time* (ES_j) من العلاقة :

$$ES_j = \max_i .\{ES_j + D_{ij}\} \quad \forall (i,j) activities$$

بإعتبار إن $ES_1 = 0$ و D_{ij} يمثل الزمن اللازم لإنجاز النشاط (i,j) .

وتوضع القيمة في الشكل المربع

المرحلة الثانية وتسمى العبور الخلفي ***Backward pass*** إذ تبدأ الحسابات من نقطة النهاية بإتجاه نقطة البداية وعند كل نقطة يحسب الوقت المتأخر ***Latest time*** (LC_i) من العلاقة

$$LC_i = \min_j .\{LC_i - D_{ij}\} \quad \forall (i,j) activities$$

بإعتبار إن $LC_n = ES_n$ ؛ وتوضع القيمة في الشكل المثلث

وكل نشاط (i,j) يقع على المسار الحرج يجب أن يحقق

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}$$

الوقت الفائض الراكد ***Free Float Time (F.F.)*** يمثل الفائض الزمني المتوفر للتوصل إلى حدث معين ويحسب من العلاقة

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

مثال 1 إرسم المخططات الشبكية للمشاريع التالية

a)

Act.	Pre-act.
A	----
B	----
C	A,B
D	A
E	C,D

b)

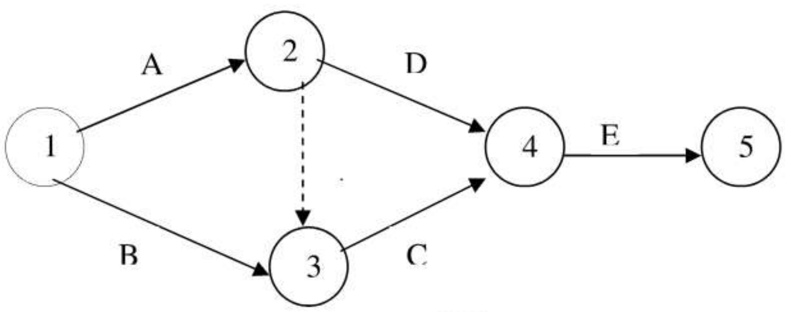
Act.	Pre-act.
A	----
B	A
C	A
D	B
E	B,C
F	D,E

c)

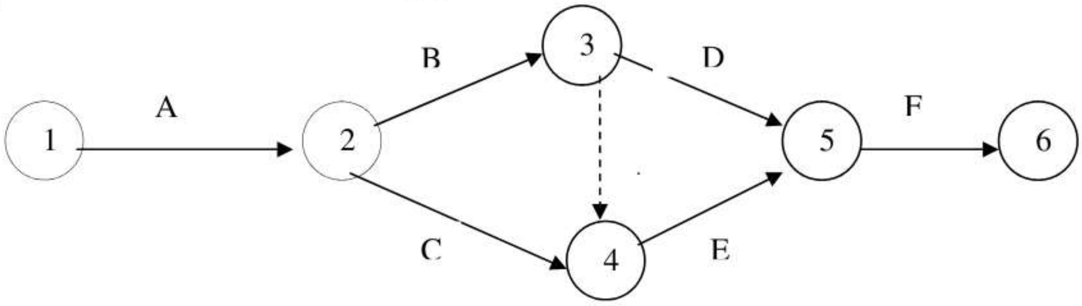
Act.	Pre-act.
A	----
B	----
C	A,B
D	A,B
E	B
F	D,E
G	C,F
H	D,E
I	G,H

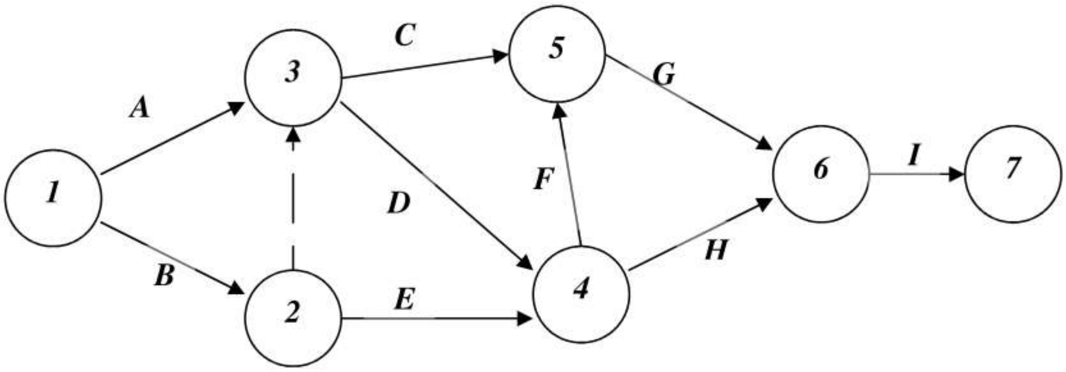
الحل

a)



b)





<u>مثال 2</u> إرسم المخطط الشبكي للمشروع التالي

الأنشطة A , B , C هي أنشطة بدائية للمشروع وتبدأ بشكل آني

النشاطان A , B يسبقان النشاط D

النشاط B يسبق الأنشطة E , F , H

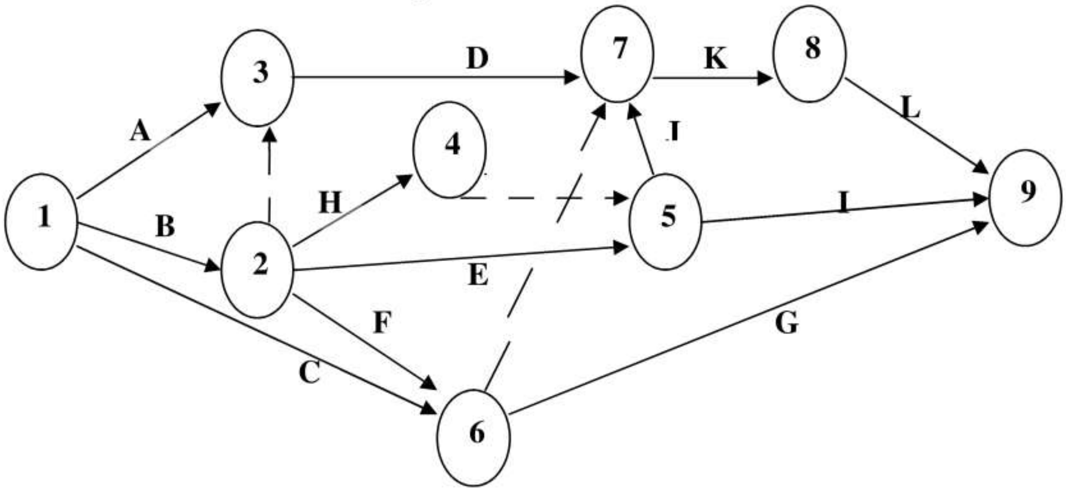
النشاطان C , F يسبقان النشاط G

النشاطان E , H يسبقان النشاطان I , J

الأنشطة C , D , F , J تسبق النشاط K

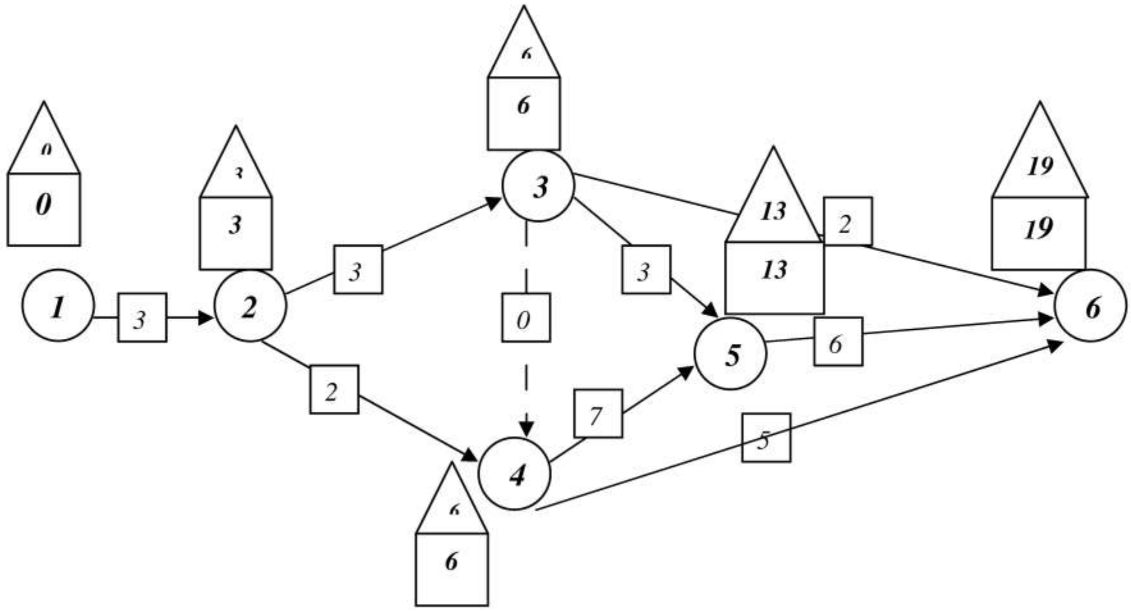
النشاط K يسبق النشاط L

الأنشطة G , I , L أنشطة نهائية للمشروع



<u>مثال 3</u> الجدول الآتي يمثل متطلبات تصنيع سلعة معينة بتسعة أنشطة ؛ أوجد المسار الحرج لتصنيع هذه السلعة

activity	*1-2*	*2-3*	*2-4*	*3-4*	*3-5*	*3-6*	*4-5*	*4-6*	*5-6*
D_{ij}	*3*	*3*	*2*	*0*	*3*	*2*	*7*	*5*	*6*



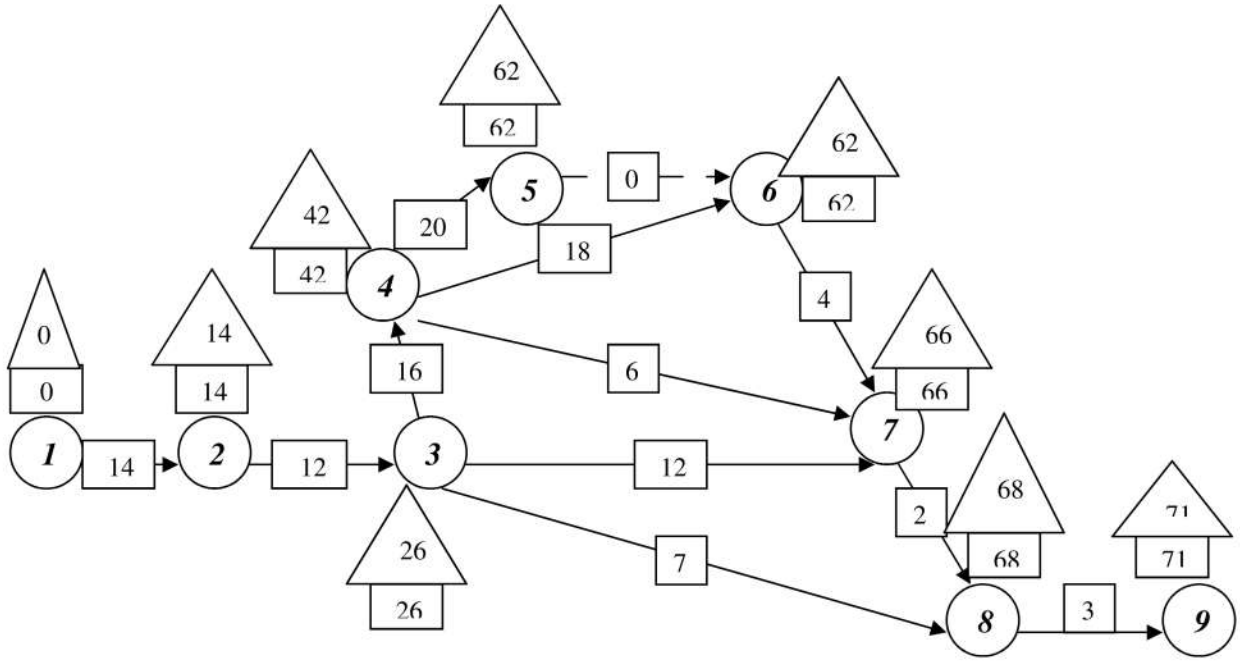
Forward pass	*Backward pass*
$ES_1 = 0$	$LC_6 = 19$
$ES_2 = 0 + 3 = 3$	$LC_5 = 19 - 6 = 13$
$ES_3 = 3 + 3 = 6$	$LC_4 = \min. \{ 13\text{-}7, 19\text{-}5 \} = 6$
$ES_4 = \max. \{ 3+2, 6+0 \} = 6$	$LC_3 = \min. \{ 6\text{-}0, 13\text{-}3, 19\text{-}2 \} = 6$
$ES_5 = \max. \{ 6+3, 6+7 \} = 13$	$LC_2 = \min. \{ 6\text{-}3, 6\text{-}2 \} = 3$
$ES_6 = \max. \{ 6+2, 6+5, 13+6 \} = 19$	$LC_1 = 3 - 3 = 0$

لذا فالمسار الحرج لتصنيع السلعة هو : *1-2-3-4-5-6* بالأنشطة الحرجة :

***(1,2) , (2,3) , (3,4) , (4,5) , (5,6)* والزمن الحرج *Critical time* هو *19* .**

<u>مثال-*4*</u> : أوجد المسار الحرج للمشروع التالي :

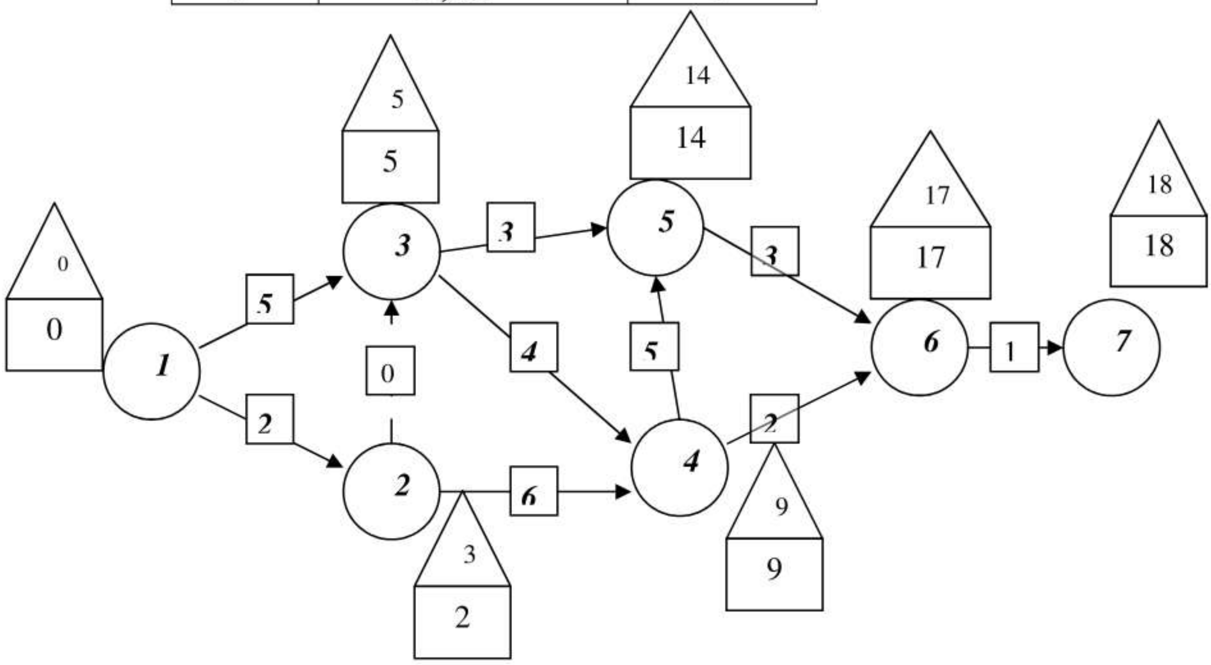
activity	*Preceding activity*	*Duration*
A	---	14
B	A	12
C	B	16
D	B	7
E	B	12
F	C	20
G	C	18
H	C	6
I	F , G	4
J	E , H , I	2
K	D , J	3



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ ؛ والزمن الحرج هو 71

<u>مثال 5</u> أوجد المسار الحرج للمشروع التالي

activity	*Preceding activity*	*Duration*
A	---	*5*
B	---	*2*
C	*A , B*	*3*
D	*A , B*	*4*
E	*B*	*6*
F	*D , E*	*5*
G	*C , F*	*3*
H	*D , E*	*2*
I	*G , H*	*1*



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : I , G , F , D , A والزمن الحرج $C.T.= 18$.

6-2- إسلوب تقييم ومراجعة البرامج Program Evaluation and Review Technique (PERT) :

يعتبر إسلوب *PERT* من الأساليب الإدارية الحديثة للسيطرة على مراحل التصنيع ويستمد أهميته في الحياة العملية لكونه يشخص الأنشطة الحرجة التي يستدعي بالضرورة الإهتمام بها وملاحظتها لأكثر من غيرها والعناية بتوفير كافة المستلزمات والإحتياجات الضرورية لأجل تنفيذها في الوقت المحدد. إضافةً لذلك فإن حساب الزمن الفائض بين الأنشطة يساعد على توجيه ونقل الموارد المالية والبشرية الفائضة من بين الأنشطة غير الحرجة إلى الأنشطة الحرجة ، وفي هذه الحالة تتهيء افضل الطرق لتقليص الوقت وتخفيض تكاليف العمل . في هذا الإسلوب تدرس ثلاثة أنواع من الأزمنة وهي :

- الزمن المتفائل *Optimistic time* (a) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل جيد جداً .
- الزمن المتشائم *Pestimistic time* (b) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل رديء جداً .
- الزمن المحتمل *Most likely time* (m) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل طبيعي .

أما الوقت المتوقع $(\overline{D})$ *Expected time* للنشاط (i , j) فيحسب من العلاقة :

$$\overline{D} = \frac{a+b+4m}{6}$$

أما التباين (V) *Variance* لكل نشاط فيحسب من العلاقة :

$$V = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

وبالتالي فإن إحتمال تنفيذ المشروع في الوقت المحدد سيكون :

$$Pr\left(Z \le \frac{ST_i - CT_i}{\sqrt{V(\mu_i)}}\right)$$

إذ إن ST_i يمثل الوقت المحدد لإنجاز المشروع .

CT_i يمثل الزمن الحرج للمشروع .

$V(\mu)$ يمثل مجموع تباين الأنشطة الحرجة للمشروع .

ويمكن إيجاد قيمة الإحتمال اعلاه من جدول التوزيع الطبيعي .

مع ملاحظة إن الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

مثال-6 : البيانات التالية توضح أزمنة تنفيذ كل نشاط من أنشطة إحدى المشاريع الصناعية.المطلوب :
حساب إحتمال تنفيذ المشروع خلال 20 شهراً .

لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : I , G , F , D , A والزمن الحرج $C.T.= 18$.

6-2- إسلوب تقييم ومراجعة البرامج ***Program Evaluation and Review Technique (PERT)*** :

يعتبر إسلوب *PERT* من الأساليب الإدارية الحديثة للسيطرة على مراحل التصنيع ويستمد أهميته في الحياة العملية لكونه يشخص الأنشطة الحرجة التي يستدعي بالضرورة الإهتمام بها وملاحظتها أكثر من غيرها والعناية بتوفير كافة المستلزمات والإحتياجات الضرورية لأجل تنفيذها في الوقت المحدد. إضافةً لذلك فإن حساب الزمن الفائض بين الأنشطة يساعد على توجيه ونقل الموارد المالية والبشرية الفائضة من بين الأنشطة غير الحرجة إلى الأنشطة الحرجة ، وفي هذه الحالة تتهيء افضل الطرق لتقليص الوقت وتخفيض تكاليف العمل . في هذا الإسلوب تدرس ثلاثة أنواع من الأزمنة وهي :

- الزمن المتفائل *Optimistic time* (a) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل جيد جداً .
- الزمن المتشائم *Pestimistic time* (b) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل رديء جداً .
- الزمن المحتمل *Most likely time* (m) والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل طبيعي .

أما الوقت المتوقع ($\overline{D}$) *Expected time* للنشاط (i , j) فيحسب من العلاقة :

$$\overline{D} = \frac{a+b+4m}{6}$$

أما التباين (V) *Variance* لكل نشاط فيحسب من العلاقة :

$$V = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

وبالتالي فإن إحتمال تنفيذ المشروع في الوقت المحدد سيكون :

$$Pr\left(Z \leq \frac{ST_i - CT_i}{\sqrt{V(\mu_i)}} \right)$$

إذ إن ST_i يمثل الوقت المحدد لإنجاز المشروع .

CT_i يمثل الزمن الحرج للمشروع .

$V(\mu)$ يمثل مجموع تباين الأنشطة الحرجة للمشروع .

ويمكن إيجاد قيمة الإحتمال اعلاه من جدول التوزيع الطبيعي .

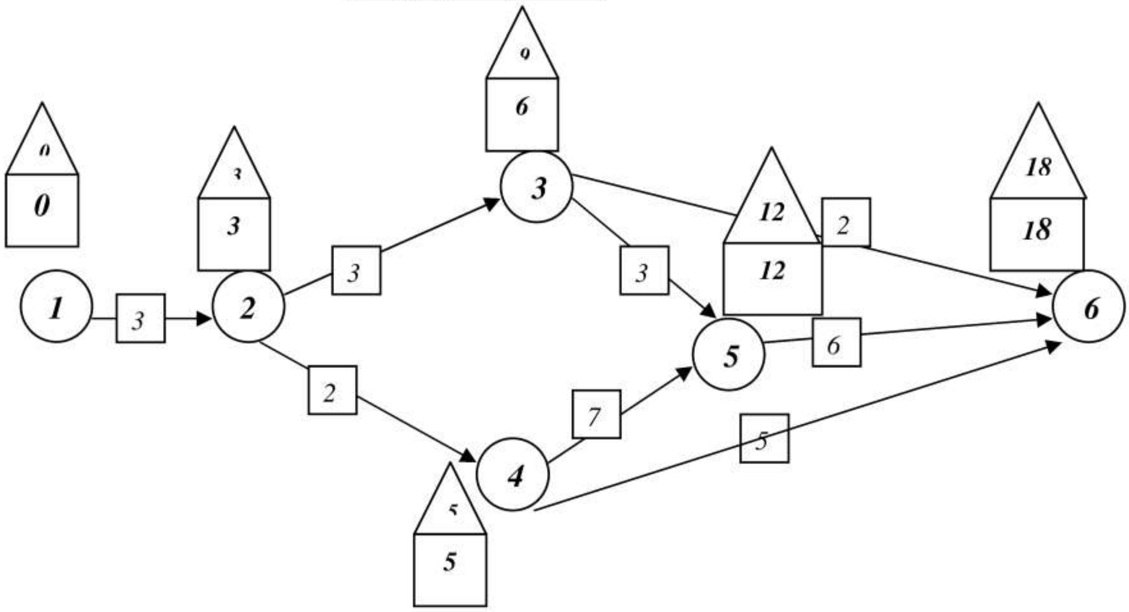
مع ملاحظة إن الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

مثال-6 : البيانات التالية توضح أزمنة تنفيذ كل نشاط من أنشطة إحدى المشاريع الصناعية.المطلوب : حساب إحتمال تنفيذ المشروع خلال *20* شهراً .

activity	a	b	m
1,2	2	8	2
2,3	1	11	1.5
2,4	0.5	7.5	1
3,5	1	7	2.5
3,6	1	3	2
4,5	6	8	7
4,6	3	11	4
5,6	4	8	6

<u>الحل</u> :

activity	$\overline{D}$	V
1,2	3	1
2,3	3	---
2,4	2	1.36
3,5	3	----
3,6	2	----
4,5	7	0.11
4,6	5	----
5,6	6	0.44
	$V(\mu)$	2.91



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : *(1,2) , (2,4) , (4,5) , (5,6)* وإن الزمن الحرج : *CT =18*.

$$Pr\left(Z_i \leq \frac{20-18}{\sqrt{2.91}}\right) = Pr\left(Z \leq 1.17\right) = 0.879$$

أي إن إحتمال إنجاز المشروع في مدة *20* شهراً هو *88%* تقريباً .

6-3- <u>تعجيل وتبطيء المخططات الشبكية</u> :

يتضمن هذا الإسلوب كلفة تنفيذ المشروع ونوعان من التنفيذ :

1- النوع الأول- التنفيذ الطبيعي (الإعتيادي) *Normal* ويتضمن الزمن D_n والكلفة C_n .

2- النوع الثاني- التنفيذ التقليصي (التعجيلي) *Crash* ويتضمن الزمن D_c والكلفة C_c .

أما خوارزمية الحل ستكون كالآتي :

1- إيجاد المسار الحرج للزمن الطبيعي ومن ثم إيجاد الزمن الحرج لتنفيذ المشروع (*CTN*) .

2- إيجاد المسار الحرج للزمن التقليصي ومن ثم إيجاد الزمن الحرج لتنفيذ المشروع في حالة التقليص (*CTC*) .

3- إيجاد الزمن المسموح بتخفيضه $T = CTN - CTC$.

4- إيجاد الميل *Slope* لكل نشاط من العلاقة :

$$Slope = \frac{C_c - C_n}{D_n - D_c}$$

5- إيجاد الوقت الفائض *Free Float (FF)* للنشاطات غير الحرجة للأزمنة الطبيعية من العلاقة:

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

والوقت الممكن تقليصه هو القيمة الأقل بين :

أ- أعلى *FF* لأنشطة كل مسار غير حرج .

ب- الفرق بين الزمن الطبيعي D_n والزمن التقليصي D_c للنشاط الحرج الذي له أقل ميل .

6- إيجاد الكلفة الكلية لتنفيذ المشروع بعد تقليص زمن تنفيذ المشروع من العلاقة :

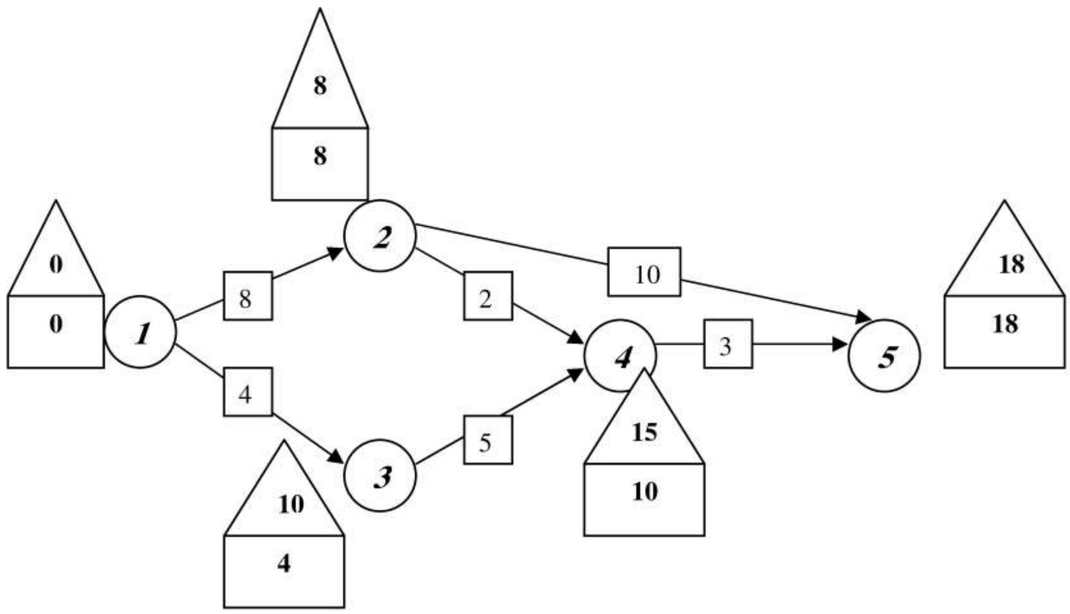
الكلفة الكلية للتنفيذ بعد التقليص = الكلفة الكلية السابقة + عدد الوحدات الزمنية المقلصة × ميل النشاط المقلص

7- إيجاد الزمن الحرج للمشروع بعد التقليص الأخير ، فإذا كان مساوياً للزمن الحرج لتنفيذ المشروع (*CTC*) (المستخرج في الخطوة 2) نتوقف وبخلافه نكرر الخطوتين 5 و 6 مرة أخرى .

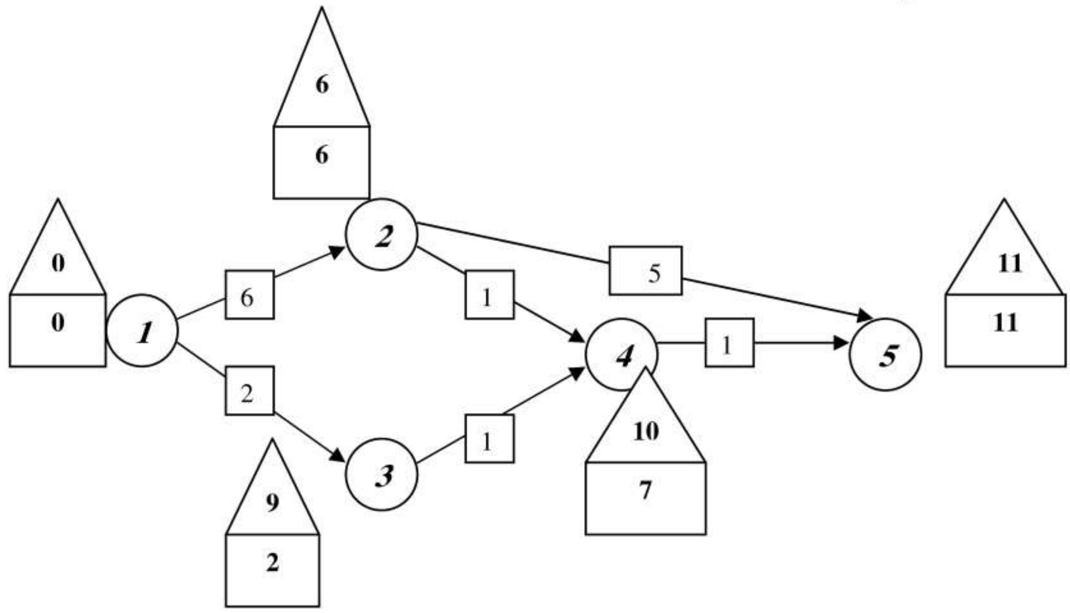
مثال-7 : البيانات المبينة أدناه تمثل زمن (شهر) وكلفة (ألف دينار) لتنفيذ كل نشاط من نشاطات إحدى المشاريع الصناعية في الحالتين الطبيعية والمقلصة . المطلوب تنفيذ المشروع بأقل وقت وكلفة ممكنتين :

	normal		Crash	
activity	D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	8	100	6	200
1 , 3	4	150	2	350
2 , 4	2	50	1	90
2 , 5	10	100	5	400
3 , 4	5	100	1	200
4 , 5	3	80	1	100
$\sum$	---	580	---	1340

الحل :



$CTN = 18$, $Total\ Cost = 580$ الزمن الطبيعي



$CTC = 11$, $Total\ Cost = 1340$ الزمن التقليصي

$CTN - CTC = 18 - 11 = 7$

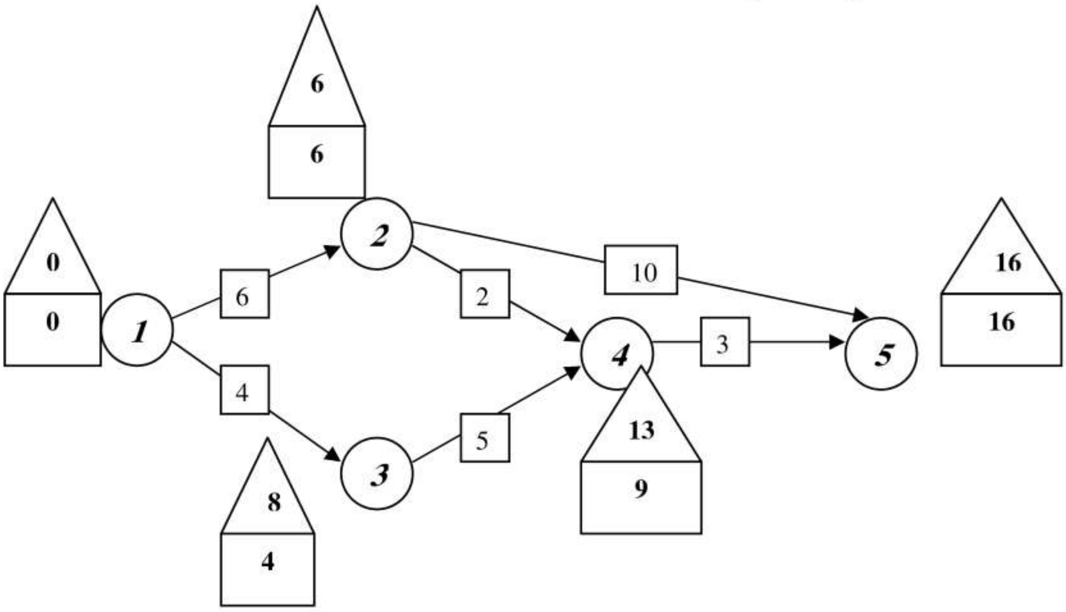
أي إنه يمكن تقليص تنفيذ المشروع بمقدار 7 أشهر .

أما الميل لكل نشاط والوقت الفائض للأنشطة غير الحرجة هي :

activity	*slope*	*F.F.*
1 , 2	*50* *	--------
1 , 3	*100*	$4 - 0 - 4 = 0$
2 , 4	*40*	$10 - 8 - 2 = 0$
2 , 5	*60* *	--------
3 , 4	*25*	$10 - 4 - 5 = 1$
4 , 5	*10*	$18 - 10 - 5 = 5$ *max.*

أما الزمن الممكن تقليصه من النشاط *(1,2)* (النشاط الحرج الذي له أقل ميل) هو: *min. { 5, 8-6} =2*

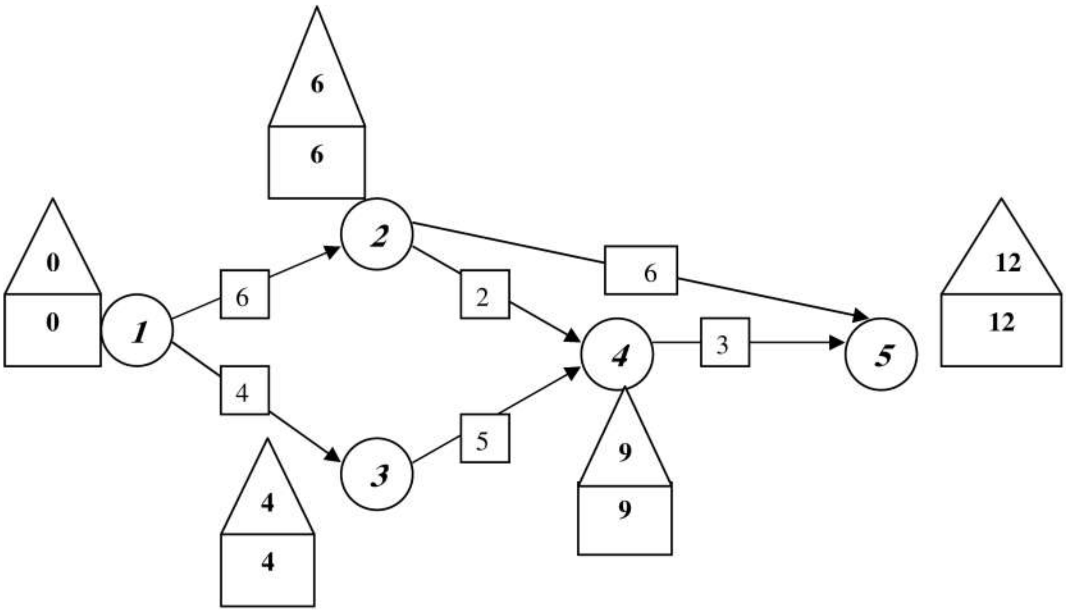
لذا فالمسار الحرج الطبيعي بعد تقليص زمن النشاط *(1,2)* شهرين سيكون :



Critical Path C.P. is : (1 , 2) , (2 , 5) and Total Cost T.C.= 580+ 2 * 50= 680

إن الوقت الحرج يمكن تقليصه مرة أخرى ، لذا سيقلص النشاط *(2,5)* إلى *min.{ 4 , 10-5 } = 4*

أي أربعة أشهر أخرى وسيكون المسار الجديد :



C.P. is : (1,2) , (2,5) and (1,3) , (3,4) , (4,5)

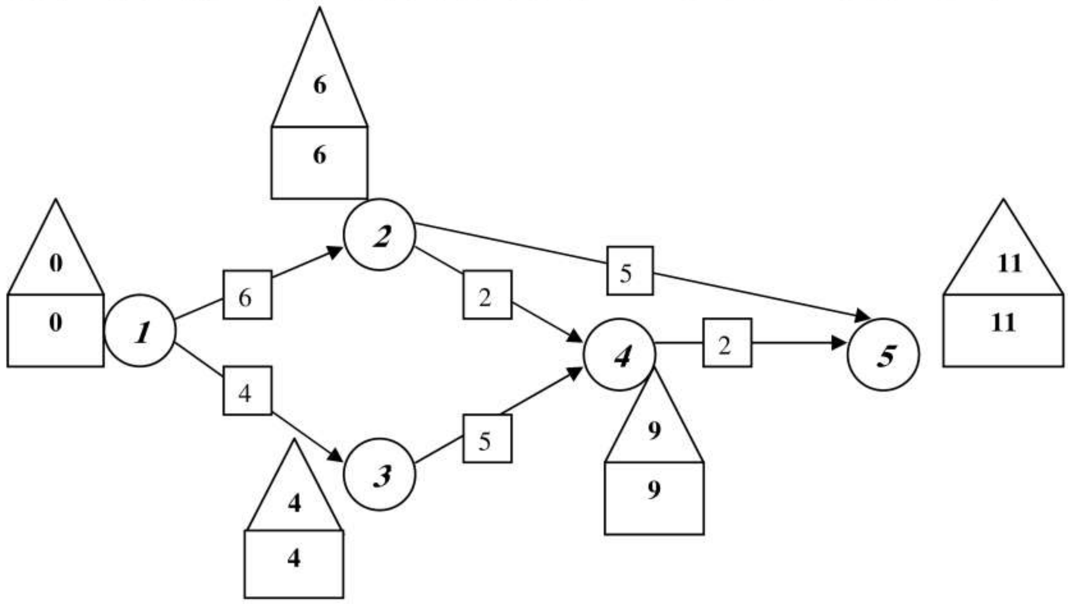
T.C. = 680 + 4 * 60 = 920

بالإمكان تقليص الزمن الكلي للإنجاز شهر واحد فقط ، إذ يمكن تقليص زمن إنجاز النشاط *(2,5)* إلى *5* أشهر ولكن هذا يؤدي إلى إن المسار الحرج سيتغير ما لم نغير من أنشطة المسار الحرج الآخر

بنفس كمية التقليص ، ولإختيار النشاط الذي سيقلص منه شهر واحد يتم إستخراج الميل للنشاط (2,5) مضافاً له ميل كل نشاط من أنشطة المسار الحرج الاخر ، ويؤخذ الأقل أي :

activity	*Slope*
(2,5) , (1,3)	*60 + 100 = 160*
(2,5) , (3,4)	*60 + 25 = 85*
(2,5) , (4,5)	*60 +10 =70 min.*

لذا سيقلص شهر واحد من زمن النشاطين (2,5) , (4,5) والمسار الحرج الجديد سيكون :



C.P. is (1,2) , (2,5) and (1,3) ,(3,4) , (4,5)
*T.C. = 920 + 1 * 70 = 990*

لذا فالمشروع قلَص زمنه من *18* إلى *11* وإرتفعت كلفة إنجازه من *580* إلى *990* وهو أقل من الكلفة المتوقعة للتقليص والتي كانت *1340* .

تمارين الفصل السادس

1- إرسم المخطط الشبكي للأنشطة التالية :

أ- الأنشطة C , B , A هي أنشطة بداية المشروع وتبدأ بشكل آني .

ب- الأنشطة F , E , D تبدأ بعد النشاط A مباشرةً .

ج- النشاطان $G . I$ يبدأن بعد إنتهاء النشاطين D , B .

د- النشاط H يبدأ بعد إنتهاء النشاطين G , C .

هـ .- النشاطان L , K يعقبان النشاط I .

و- النشاط J يعقب كلٍ من النشاطين H , E .

ز- النشاطان N , M يعقبان النشاط F ولكن لا يبدءان إلا بعد أن ينتهي النشاطين H , E .

ح- النشاط O يعقب النشاطين I , M .

ط- النشاط P يعقب الأنشطة O , L , J .

ي- الأنشطة P , N , K هي أنشطة نهائية للمشروع .

2- أوجد المسار الحرج لشبكة الإعمال الآتية :

activity	Pre. Act.	Duration
R	----	24
E	R	16
H	G	16
N	P, Q, U, S	8
M	L , K	8
K	H	16
P	E , D	36
S	T , M	16
L	H	24

activity	Pre. Act.	Duration
D	C , B	6
C	A	8
B	A	16
U	F	8
Q	E	12
A	R	16
F	R	40
G	R	24
T	G	4

(ans.: R , G , H , L , M , S , N ; 120)

3-أوجد المسار الحرج لشبكة الإعمال التالية :

activity	Pre. Act.	Duration
A	----	10
B	----	28
C	A	2
D	C	1
E	D	2
F	D	30
G	D	45
H	B , D	1
I	E , H	6

Activity	Pre. Act.	Duration
J	F	5
K	E , G , H	1
L	I , J	6
M	J , L	2
N	K , M	1
O	K , M	4
P	N	1
Q	N, O	1
R	P , Q	1

(ans.: A , C , D , G , K , O , Q , R ; 65)

4- الجدول التالي يمثل فعاليات مشروع صناعي ، المطلوب إيجاد إحتمالية إنجاز المشروع خلال ***39*** إسبوعاً وإن الإنحراف المعياري هو ***1.9*** :

Act.	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***	***I***
Pre.act.	---	---	***A***	***A,B***	***A,B***	***C,D***	***A***	***C,D,G***	***E,F,H***
Duration	***5***	***7***	***6***	***8***	***7***	***5***	***6***	***9***	***10***

(ans.: 99.6%)

5- لتنفيذ مشروع صناعي أنشطته موضحة في الجدول التالي :

Act.	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***	***I***
Pre.act.	---	---	***A,B***	***A,B***	***B***	***D,E***	***C,F***	***D,E***	***G,H***
Duration	***6***	***5***	***7***	***8***	***4***	***6***	***7***	***4***	***X***

المطلوب:أ- أوجد قيمة X للنشاط I ، إذا علمت إن الدرجة المعيارية للأنشطة الحرجة $Z = 1.5$ محسوبة على أساس إحتمالية إنجاز المشروع خلال ***34*** إسبوعاً والإنحراف المعياري = ***2*** .

ب- إذا كان النشاط H يمثل عملية مد أنابيب بقطر ***25*** سم وقد أبلغ مورد الأنابيب الشركة بأن عملية تجهيز الأنابيب تتم بعد ***16*** أسبوعاً من بدء العمل بالمشروع . ما تاثير عملية التأخير؟ وهل ستتحمل الشركة خسائر علماً إن تكاليف التأخير عن المدة المقررة لإنجاز المشروع لكل يوم هي ***50000*** ديناراً ، بإعتبار أيام العمل بالإسبوع ***6*** أيام ؟

ج- قدم إقتراح للشركة لتقليص مدة تنفيذ النشاط C إلى ***5*** أسابيع بدلاً من ***7*** أسابيع على أن تدفع الشركة ***25000*** ديناراً عن كل يوم تقليص ، هل تقبل الشركة بهذا الإقتراح ؟ علماً إن الربح الذي تحققه الشركة عن الإسراع بتنفيذ المشروع لكل يوم هو ***30000*** ديناراً .

(ans.: a) 4 ; b) 600000 ; c)- 300000)

6- إذا كانت أنشطة مشروع صناعي كالآتي :

Act.	***(a,b,m)***	***Act.***	***(a,b,m)***
1 , 2	***5 , 7 , 6***	***3 , 6***	***3 , 5 , 4***
1 , 4	***1 , 5 , 3***	***4 , 6***	***4 , 9 , 8***
1 , 5	***2 , 6 , 4***	***4 , 7***	***4 , 8 , 6***
2 , 3	***4 , 6 , 5***	***5 , 6***	***9 , 14 , 10***
2 , 5	***6 , 10 , 8***	***5 , 7***	***4 , 8 , 6***
2 , 6	***8 , 13 , 9***	***6 , 7***	***3 , 5 , 4***
3 , 4	***5 , 10 , 9***		

ما هو إحتمال إنجاز المشروع في مدة ***34*** إسبوعاً ؟

(ans.: 98.9%)

7- لشبكة الأعمال التالية ، أوجد المدة الزمنية المثلى لتنفيذ المشروع لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

Act.	Normal		crash			Act.	normal		crash	
	D_n	C_n	D_c	C_c			D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	4	100	1	400		3 , 7	14	120	12	140
1 , 4	9	120	6	180		4 , 5	15	500	10	750
1 , 3	8	400	5	640		4 , 7	10	200	6	220
1 , 6	3	20	1	60		5 , 6	11	160	8	240
2 , 3	5	60	3	100		5 , 7	8	70	5	110
2 , 5	9	210	7	270		6 , 7	10	100	2	180
3 , 4	12	400	8	800		$\sum$	---	2460	--	4090

(ans.: 33 ; 3750)

8- أوجد المدة المثلى لإنجاز المشروع التالي لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

Act.	normal		crash	
	D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	5	1000	4	1400
1 , 3	9	2000	7	3000
2 , 3	7	2500	4	3400
2 , 4	9	2800	7	3400
3 , 5	5	2500	2	4600
3 , 6	11	4000	7	7200
4 , 6	6	3000	4	4200
5 , 6	8	800	6	1400
$\sum$	--	18600	--	28600

(ans.: 16 ; 24600)

7- لشبكة الأعمال التالية ، أوجد المدة الزمنية المثلى لتنفيذ المشروع لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

Act.	Normal D_n	Normal C_n	crash D_c	crash C_c
1 , 2	4	100	1	400
1 , 4	9	120	6	180
1 , 3	8	400	5	640
1 , 6	3	20	1	60
2 , 3	5	60	3	100
2 , 5	9	210	7	270
3 , 4	12	400	8	800

Act.	normal D_n	normal C_n	crash D_c	crash C_c
3 , 7	14	120	12	140
4 , 5	15	500	10	750
4 , 7	10	200	6	220
5 , 6	11	160	8	240
5 , 7	8	70	5	110
6 , 7	10	100	2	180
$\sum$	---	2460	--	4090

(ans.: 33 ; 3750)

8- أوجد المدة المثلى لإنجاز المشروع التالي لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

Act.	normal D_n	normal C_n	crash D_c	crash C_c
1 , 2	5	1000	4	1400
1 , 3	9	2000	7	3000
2 , 3	7	2500	4	3400
2 , 4	9	2800	7	3400
3 , 5	5	2500	2	4600
3 , 6	11	4000	7	7200
4 , 6	6	3000	4	4200
5 , 6	8	800	6	1400
$\sum$	--	18600	--	28600

(ans.: 16 ; 24600)

الفصل السابع

نماذج التتابع [2] *Sequencing models*

تهدف نماذج التتابع (التعاقب) *Sequencing models* بصورة عامة إلى إيجاد التسلسل الأمثل لتنفيذ المهام المختلفة خلال مرورها بـ *m* من المكائن (إذ إن $m = 1 , 2 , 3,....$) بالإضافة إلى الحصول على أقل وقت كلي للتنفيذ وإيجاد الوقت الضائع (العاطل) *idle time* لكل ماكنة من هذه المكائن .

أما الإفتراضات العامة التي تعتمدها نماذج التتابع هي :

1- لكل مهمة بداية ونهاية .

2- يمكن إنجاز مهمة واحدة فقط على ماكنة معينة في وقت محدد .

3- يجب إكمال المهمة قبل أن يبدأ تنفيذ المهمة التي تليها .

4- وجود ماكنة واحدة فقط من كل نوع .

5- يجب تهيئة المهمة بالكامل عندما يحين وقت بداية تنفيذها .

6- يمكن إهمال الوقت المطلوب لنقل المهمة من ماكنة إلى أخرى .

7- يفترض عدم وجود أي عطل من شأنه أن يعطل او يوقف العمل كالصيانة أو تغيير فرقي وجبات العمل او عدم توفر أي من عوامل الإنتاج .

لذا فهذه النماذج ستأخذ الحالات التالية :

7-1- إنجاز *n* من المهام على ماكنة واحدة *Processing n jobs through 1 machine* :

يتم في هذه الحالة إنجاز *n* من المهام خلال مرورها بماكنة واحدة فقط ضمن الخوارزمية التالية:

أ- ترتيب المهام حسب الزمن المستغرق تصاعدياً أو تنازلياً .

ب- نجد أقصر وقت تشغيل *Shortest processing time (S.p.t.)* بقسمة مجموع أوقات إنتهاء المهام للترتيب التصاعدي على عدد المهام .

ج- نجد أطول وقت تشغيل *Largest processing time (L.p.t.)* بقسمة مجموع أوقات إنتهاء المهام للترتيب التنازلي على عدد المهام .

مثال-1 : ستة مهام تنجز على ماكنة واحدة وأوقاتها المستغرقة (ساعة) لكل مهمة هي :

Jobs	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Time	*8*	*6*	*2*	*7*	*10*	*4*

أوجد أقل زمن مستغرق لإنجاز جميع المهام وفقاً لمقياسيي :

أ) أقصر وقت للتشغيل *Spt* ، ب) أطول وقت للتشغيل *Lpt* .

الحل :

أ)حسب الترتيب التصاعدي :

sequence	jobs	time	Processing Start	Finish
1	C	2	0	2
2	F	4	2	6
3	B	6	6	12
4	D	7	12	19
5	A	8	19	27
6	E	10	27	37
$\sum$				103

Spt = 103/6 = 17.16 hrs.

ب) حسب الترتيب التنازلي :

Sequence	jobs	time	Processing Start	Finish
1	E	10	0	10
2	A	8	10	18
3	D	7	18	25
4	B	6	25	31
5	F	4	31	35
6	C	2	35	37
$\sum$				156

Lpt = 156/6 = 26 hrs

ملاحظة : يمكن إيجاد التتابع الأمثل للمهام إذا كانت هناك ترجيحات مختلفة لكل مهمة وذلك بإيجاد الزمن المعدل من خلال قسمة الزمن المستغرق لكل مهمة t_i على الترجيحات المقابلة لتلك المهمة W_i والترتيب التصاعدي للزمن المعدل هو التتابع الأمثل .

مثال-2 : أوجد التتابع الأمثل للمهام التالية المنجزة على ماكنة واحدة وأوقات تشغيلها (ساعة) هي :

Jobs	A	B	C	D	E	F
Time t_i	10	6	5	4	2	8
Weight W_i	5	10	5	1	3	5

الحل : الزمن المعدل $\bar{t}$ هو :

$\bar{t}$	Jobs
10/5 = 2	A
6/10 = 0.6	B
5/5 = 1	C
4/1 = 4	D
2/3 = 0.67	E
8/5 = 1.6	F

وعليه فالتتابع الأمثل هو : *B – E – C – F – A – D* .

2-7 – إنجاز *n* من المهام على ملكنتين *Processing n jobs through 2 machines:*

تأخذ هذه الحالة الخوارزمية التالية :

1- يحدد الزمن الأقل من كل مهمة .

2- يبدأ بتسلسل المهام حسب التسلسل الزمني التصاعدي للملكنة الأولى (أي من الزمن الأقل إلى الزمن الأعلى) وفي حالة تساوي أقل زمنين نختار أولاً الزمن الذي له فرق أكبر مع زمنه الأخر للملكنة الثانية أو نختار الزمن الذي له أقل فرق مع زمنه الأخر للملكنة الأولى .

3- نستمر بتسلسل المهام حسب التسلسل الزمني التنازلي للملكنة الثانية (أي من الزمن الأكبر إلى الزمن الأقل).

4- إستناداً لتسلسل المهام نجد زمن البداية والنهاية لكل مهمة للملكنة الأولى .

5- لنفس تسلسل المهام نجد زمن البداية والنهاية لكل مهمة للملكنة الثانية إذ يعتمد زمن البداية على القيمة الأكبر بين نهاية المهمة السابقة على الملكنة الثانية ونهاية المهمة الحالية على الملكنة الأولى .

6- يحسب أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز جميع المهام على الملكنتين هو زمن إنجاز المهمة الأخيرة على الملكنة الثانية .

7- الزمن الضائع (العاطل) *idle time* للملكنة الأولى هو الفرق بين زمني الإنتهاء على كلتا الملكنتين .أما الزمن الضائع للملكنة الثانية هو مجموع الفروق بين وقت بداية ونهاية كل مهمة على الملكنة الثانية .

مثال-3 : ستة مهام تنجز على ملكنتين *A , B* وتسلسل العمل هو *A* ثم *B* ، الزمن المستغرق (ساعة) لكل مهمة هو :

Jobs	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Mach. A	*3*	*12*	*5*	*2*	*9*	*11*
Mach. B	*8*	*10*	*9*	*6*	*3*	*1*

المطلوب : إيجاد التتابع الأمثل بأقل زمن كلي مستغرق لإنجاز جميع المهام وكذلك إيجاد الوقت الضائع لكلتا الملكنتين .

الحل :

1	2	3	4	5	6
2 3	12	3 5	1 2	9	11
8	4 10	9	6	5 3	6 1

The optimal sequencing is : 4 – 1 – 3 – 2 – 5 – 6

jobs	Mach. A			Mach. B			
	Time	Start	Finish	time	Start	Finish	Idle
4	2	0	2	6	2	8	2
1	3	2	5	8	8	16	0
3	5	5	10	9	16	25	0
2	12	10	22	10	25	35	0
5	9	22	31	3	35	38	0
6	11	31	42	1	42	43	4
$\sum$							6

أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز جميع المهام هو *43* ساعة .

الوقت الضائع للماكنة *A* هو : *43 – 42 = 1 hr.*

الوقت الضائع للماكنة *B* هو : *6 hrs.*

<u>مثال–4</u> : سبعة مهام تنجز على ماكنتين *A* ثم *B* ، الزمن المستغرق (ساعة) هو :

jobs	1	2	3	4	5	6	7
Mach. A	3	12	15	6	10	11	9
Mach. B	8	10	10	6	12	1	3

المطلوب : حدد التتابع الأمثل لتقليل الزمن الكلي المستغرق لإنجاز المهام مع تحديد الوقت الـ ضائع لكلا الماكنتين .

<u>الحل</u> :

1	2	3	4	5	6	7
1 <u>3</u>	12	15	2 <u>6</u>	3 <u>10</u>	11	9
8	5 <u>10</u>	4 <u>10</u>	6	12	7 <u>1</u>	6 <u>3</u>

The optimal sequencing is : 1 – 4 – 5 – 3 – 2 – 7 – 6

jobs	Mach. A			Mach. B			
	time	Start	finish	time	Start	finish	idle
1	3	0	3	8	3	11	3
4	6	3	9	6	11	17	0
5	10	9	19	12	19	31	2
3	15	19	34	10	34	44	3
2	12	34	46	10	46	56	2
7	9	46	55	3	56	59	0
6	11	55	66	1	66	67	7
$\sum$							17

أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز جميع المهام هو *67* ساعة .

الوقت الضائع للماكنة *A* هو : *67 – 66 = 1 hr.* .

الوقت الضائع للماكنة *B* هو : *17 hrs* .

3-7 – إنجاز n من المهام على ثلاثة مكائن *Processing n jobs through 3 machines* :

في هذه الحالة يجب تحقق أحد الشرطين على الأقل :

أ- أقل وقت على الملكنة الأولى $\leq$ أكبر وقت على الماكنة الثانية .

أو ب- أقل وقت على الملكنة الثالثة $\leq$ أكبر وقت على الماكنة الثانية .

أما خوارزمية الحل فتكون :

1. نقوم بتحويل الثلاثة مكائن إلى ملكنتين وهميتين G , H أوقات إشتغالهما تكون :

$$H_i = B_i + C_i \quad , \quad G_i = A_i + B_i$$

2. نجد التتابع الأمثل للملكنتين H , G .
3. نعتمد تسلسل المهام حسب التتابع الأمثل ونجد وقت بداية ونهاية كل عملية لكل ملكنة من المكائن الأصلية وحسب الطريقة السابقة .
4. إن الزمن الضائع لكلا الملكنتين الأولى والثالثة تحتسب بنفس الطريقة السابقة ، ولكن الإختلاف هو في حساب الوقت الضائع على الملكنة B ، إذ تحتسب من العلاقة :

زمن إنتهاء المهمة الأخيرة (حسب التسلسل الأمثل للمهام) على الملكنة الثالثة – زمن إنتهاء المهمة الأخيرة على الملكنة الثانية + الوقت الضائع المحتسب للملكنة الثانية .

<u>مثال-5</u> : ستة مهام تنجز على ثلاثة مكائن C , B , A ، حسب التسلسل ABC . أوجد التتابع الأمثل لإنجاز المهام بأقل وقت كلي مستغرق والوقت الضائع لكل ملكنة ، إذا علمت إن الزمن المستغرق لكل عملية على كل ملكنة (ساعة) هو :

Jobs	1	2	3	4	5	6
Mach. A	3	12	5	2	9	11
Mach. B	8	6	4	6	3	1
Mach. C	13	14	9	12	8	13

<u>الحل</u> : تحقق الشرط الثاني : أقل وقت على الملكنة الثالثة $\leq$ لكبر وقت على الملكنة الثانية .

لذا يمكننا حل النموذج بإستخدام الخوارزمية أعلاه :

بإفتراض إن : $H_i = B_i + C_i \quad , \quad G_i = A_i + B_i$

jobs	1	2	3	4	5	6
Mach. G	$\underline{11}$ 3	$\underline{18}$ 5	$\underline{9}$ 2	$\underline{8}$ 1	12	$\underline{12}$ 4
Mach. H	21	20	13	18	$\underline{11}$ 6	14

The optimal sequencing is : 4 – 3 – 1 – 6 – 2 – 5

	Mach. A			Mach. B				Mach. C			
jobs	t.	S.	F.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.
4	2	0	2	6	2	8	2	12	8	20	8
3	5	2	7	4	8	12	0	9	20	29	0
1	3	7	10	8	12	20	0	13	29	42	0
6	11	10	21	1	21	22	1	13	42	55	0
2	12	21	33	6	33	39	11	14	55	69	0
5	9	33	42	3	42	45	3	8	69	77	0
$\sum$							17				8

أقل زمن ممكن لإنجاز جميع المهام هو : *77 hrs.* .

الوقت الضائع على الملكنة A هو : $77 - 42 = 35$ hrs. .

الوقت الضائع على الملكنة B هو : $77 - 45 + 17 = 49$ hrs .

الوقت الضائع على الملكنة C هو : 8 hrs .

4-7− إنجاز n من المهام على m مكائن *Processing n jobs through m machines* :

يعالج هذا النموذج حالات تتضمن إنجاز n من المهام على m من المكائن بحيث يكون $m \geq 4$ وهو إمتداد للحالة السابقة ، لذا يجب أن يتحقق أحد الشرطين أو كليهما :

أ− أقل زمن على الملكنة الأولى $\geq$ أكبر زمن على المكائن الوسطية .

أو ب− أقل زمن على الملكنة الأخيرة $\geq$ أكبر زمن على المكائن الوسطية .

تطبق نفس الخوارزمية السابقة (عندما يكون لدينا ثلاثة مكائن) وذلك بتحويل m من المكائن إلى ملكنتين وهميتين H , G بحيث أوقاتهما تكون :

$$G_i = M_1 + M_2 + \ldots + M_{m-1} \quad , \quad H_i = M_2 + M_3 + \ldots + M_m$$

مثال−6 : أربعة مهام تنجز على خمسة مكائن حسب التسلسل $ABCDE$ ، أوقاتها (ساعة) هي :

	machines				
jobs	A	B	C	D	E
1	7	5	2	3	9
2	6	6	4	5	10
3	5	4	5	6	8
4	8	3	3	2	6

أوجد أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز المهام الأربعة وكذلك الوقت الضائع لكل ملكنة .

الحل : تحقق الشرط الثاني لأن :

$$Min. \{ E \} = 6 \geq max. \{ B, C, D \} = 6$$

لذا تحول المكائن الخمسة إلى ملكنتين H , G :

$$G_i = A_i + B_i + C_i + D_i \quad \text{and} \quad H_i = B_i + C_i + D_i + E_i$$

	G machines	H
1	17 i	19

2	21 3	25
3	20 2	23
4	16	14 4

The optimal sequencing is : 1 – 3 – 2 – 4

Job	Mach. A			Mach. B				Mach. C				Mach. D				Mach. E			
	t.	S.	F.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.
1	7	0	7	5	7	12	7	2	12	14	12	3	14	17	14	9	17	26	17
3	5	7	12	4	12	16	0	5	16	21	2	6	21	27	4	8	27	35	1
2	6	12	18	6	18	24	2	4	24	28	3	5	28	33	1	10	35	45	0
4	8	18	26	3	26	29	2	3	29	32	1	2	33	35	0	6	45	51	0
$\sum$							11				18				19				18

أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز المهام الربعة هو : *51 hrs.* .

الوقت الضائع للملكنة A هو : $51 - 26 = 15$ *hrs.* .

الوقت الضائع للملكنة B هو : $51 - 29 + 11 = 33$ *hrs.* .

الوقت الضائع للملكنة C هو : $51 - 32 + 18 = 37$ *hrs.* .

الوقت الضائع للملكنة D هو : $51 - 35 + 19 = 35$ *hrs.* .

الوقت الضائع للملكنة E هو : *18 hrs.* .

<u>ملاحظة</u> : في حالة مجموع أوقات المكائن الوسطية (أي ماعدا الأولى والأخيرة) لكل مهمة يكون متساوي ، لذا لا نحتاج إلى إستخدام ملكنتين وهميتين ويمكن إعتبار المسألة مكونة من ملكنتين أصليتين هما الملكنة الأولى والملكنة الأخيرة ، وكما موضحة في المثال التالي :

<u>مثال–7</u> : اربعة مهام تنجز على اربعة مكائن حسب الترتيب *ABCD* ، أوقات التشغيل (ساعة) هي:

job	machines			
	A	B	C	D
1	58	14	14	48
2	30	10	18	32
3	28	12	16	44
4	64	16	12	42

أوجد أقل زمن كلي مستغرق لإنجاز المهام الأربعة والوقت الضائع لكل ملكنة .

<u>الحل</u> : تحقق الشرطان لأن :

$$Min.\ \{A\} = 28 \ \geq max\ \{B, C\} = 18 \quad and \quad min.\ \{D\} = 32 \geq \ max\ \{B, C\} = 18$$

وكذلك فإن :

$$B_1 + C_1 = B_2 + C_2 = B_3 + C_3 = B_4 + C_4 = 28$$

لذا نأخذ الملكنتين الأولى A والأخيرة D فقط :

job	machines	
	A	D
1	58	<u>48</u> 3
2	<u>30</u> 2	32
3	<u>28</u> 1	44
4	64	<u>42</u> 4

The optimal sequencing is : 3 – 2 – 1 – 4

job	Mach. A			Mach. B				Mach. C				Mach. D			
	t.	S.	F.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.	t.	S.	F.	I.
3	28	0	28	12	28	40	28	16	40	56	40	44	56	100	56
2	30	28	58	10	58	68	18	18	68	86	12	32	100	132	0
1	58	58	116	14	116	130	48	14	130	144	144	48	144	192	12
4	64	116	180	16	180	196	50	12	196	208	52	42	208	250	16
$\sum$							144				148				84

الزمن الكلي المستغرق لإنجاز المهام الأربعة هو : 250 hrs. .

الوقت الضائع للملكنة A هو : 250 – 180 = 70 hrs. .

الوقت الضائع للملكنة B هو : 250 – 196 +144 = 198 hrs. .

الوقت الضائع للملكنة C هو : 250 – 208 + 148 = 190 hrs. .

الوقت الضائع للملكنة D هو : 84 hrs. .

5-7 – <u>إنجاز *n* من المهام على ملكنتين في ورشة ذات مسالك تكنولوجية (عشوائية الإنسياب)</u> :

إذ يتم تجزئة هذه المهام إلى أربعة مجاميع :

- **المجموعة الأولى تنجز على الملكنة A فقط .**
- **المجموعة الثانية تنجز على الملكنة B فقط .**
- **المجموعة الثالثة تنجز على كلا الملكنتين حسب التسلسل AB .**
- **المجموعة الرابعة تنجز على كلا الملكنتين حسب التسلسل BA .**

ومنها نجد التتابع الأمثل لكل مجموعة ، وكما موضحة في المثال الآتي :

<u>مثال–8</u> : عشرة مهام تنجز على ملكنتين في ورشة عمل عشوائية الإنسياب وحسب البيانات أدناه التي تمثل وقت التشغيل لكل عمل على الملكنة :

jobs		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Operating order	1	A	A	A	A	B	B	B	B	B	A
	2	B	---	---	B	A	---	A	---	A	B
Operating Time	1	4	3	4	5	1	1	7	3	6	2
	2	6	---	---	2	2	---	8	---	7	4

المطلوب : إيجاد التتابع الأمثل والوقت المستغرق والوقت الضائع لكل ملكنة .

الحل : المهام التي تنجز على الملكنة A فقط هي { 2 , 3 } ، بالإستناد إلى زمن التشغيل الأقل يكـ ون التتابع الأمثل هو 2 ثم 3 ، المهام التي تنجز على الملكنة B فقـ ط هـ ي { 8 , 6 } والتتـ ابع الأمثل هو 6 ثم 8 ، المهام التي تنجز على الملكنة A ثم الملكنة B هي { 10 , 4 , 1 } ويكون التتابع الأمثل هو 10 ثم 1 ثم 4 إستناداً إلى :

jobs	A	B
1	2 <u>4</u>	6
4	5	3 <u>2</u>
10	1 <u>2</u>	4

أما المهام التي تنجز على الملكنة B ثم الملكنة A هي { 9 , 7 , 5 } ويكون التتابع الأمثـ ل هو 5 ثم 9 ثم 7 ، إستناداً إلى :

jobs	B	A
5	<u>1</u> 1	2
7	<u>7</u> 3	8
9	<u>6</u> 2	7

وعليه التتابع الكلي المنجز على الملكنة A حسب الترتيب AB ثم A ثم BA سيكون :

10 – 1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 9 – 7

أما التتابع الكلي المنجز على الملكنة B حسب الترتيب BA ثم B ثم AB سيكون :

5 – 9 – 7 – 6 – 8 – 10 – 1 – 4

Mach. A			
job	t.	S.	F.
10	2	0	2
1	4	2	6
4	5	6	11
2	3	11	14
3	4	14	18
5	2	18	20
9	7	20	27
7	8	27	35

Mach. B			
job	t.	S.	F.
5	1	0	1
9	6	1	7
7	7	7	14
6	1	14	15
8	3	15	18
10	4	18	22
1	6	22	28
4	2	28	30

job	Idle time وقت الإنتظار قبل التنفيذ
1	2 + 22 – 6 = 18
2	11
3	14
4	28 – 11 + 6 = 23
5	18 – 1 = 17
6	14
7	27 – 14 + 7 = 20
8	15
9	20 – 7 + 1 = 14
10	18 – 2 = 16

الوقت الضائع للملكنة A هو صفر .

أما الوقت الضائع للملكنة B هو : 5 = 30 – 35 .

تمارين الفصل السابع

1- خمسة مهام تنجز على ملكنة واحدة واوقاتها المستغرقة (دقيقة) لكل مهمة هي :

job	A	B	C	D	E
time	4	3	5	2	6

أوجد أقصر وقت للتشغيل *Spt* وأطول وقت للتشغيل *Lpt* . *(ans. : 10 , 14)*

2- خمسة مهام تنجز على ملكنتين *A* ثم *B* ، الزمن المستغرق (ساعة) هو :

Job	1	2	3	4	5
Mach. A	5	1	9	3	10
Mach. B	2	6	7	8	4

حدد التتابع الأمثل لتقليل الزمن الكلي لإنجاز المهام مع تحديد الوقت الضائع لكلا الملكنتين .

(ans.: 2-4-3-5-1 , 2 , 3)

3- خمسة مهام تنجز على ملكنتين *A* ثم *B* ، الزمن المستغرق (ساعة) هو :

Job	1	2	3	4	5
Mach. A	4	5	2	6	1
Mach. B	3	2	5	4	2

حدد الوقت الضائع لكلا الملكنتين للتتابع الأمثل في تقليل الزمن الكلي للإنجاز .

(ans.: 5-3-4-1-2 , 2 , 4)

4- خمسة مهام تنجز على ثلاثة مكائن *A* ثم *B* ثم *C* ، الزمن المستغرق (ساعة) للإشتغال هو:

Job	1	2	3	4	5
Mach. A	3	8	7	5	4
Mach. B	4	5	1	2	3
Mach. C	7	9	5	6	10

أوجد التتابع الأمثل ثم الوقت الضائع لكل ملكنة . *(ans.: 4-1-5-2-3 ; 17 , 29 , 7)*

5- ثمانية مهام تنجز على ثلاثة مكائن *A* ثم *B* ثم *C* ، الزمن المستغرق (دقيقة) للإشتغال هو:

Job	1	2	3	4	5	6	7	8
Mach. A	5	6	2	3	4	9	15	11
Mach. B	4	6	7	4	5	3	6	2
Mach. C	8	10	7	8	11	8	9	13

أوجد التتابع الأمثل ثم الوقت الضائع لكل ملكنة . *(ans.: 4-1-3-5-2-8-7-6 ; 26 , 44 , 7)*